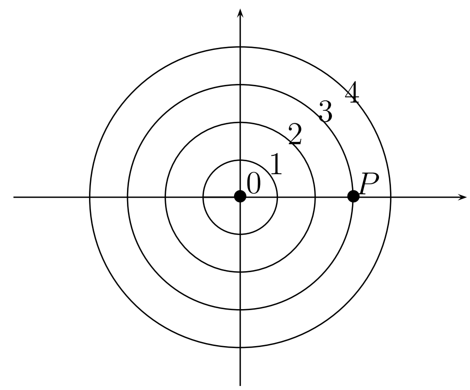
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DISCIPLINA: Cálculo B CÓDIGO: MAT A03 TURMA: T10/T03
PROFESSOR: *Joseph Nee Anyah Yartey* DATA: 28/06/2007
ALUNO(A): ____________________

PROVA DA UNIDADE III

Parte A: Responde todas as questões - Cada questão vale 8 pontos.

Questão 1: Responda VERDADEIRO ou FALSO.

(a) O diagrama ao lado mostra as curvas de nível de uma função $f(x, y)$. A derivada direcional $f_{\vec{u}}(x, y)$ no ponto P na direção $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é positiva.



(b) Para uma função, $g(x, y)$, a derivada direcional no ponto (x_0, y_0) é um vetor no plano xy.

(c) Para uma função $h(x, y)$, se ambas as derivadas parciais forem contínuas, então a função é diferenciável.

(d) Para $g(x, y, z)$, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal a superfície de nível $g(x, y, z) = 2$ no ponto (x_0, y_0, z_0).

(e) Seja $f(x, y)$ uma função contínua, então $\int_{y=0}^{1} \int_{x=\sqrt{y}}^{1} f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{1} f(x, y) dy dx$.

Questão 2: Suponha que $z = f(x, y)$ é dado implicitamente pela equação $xyz = \cos(x + y + z)$. Ache a derivada partial $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(x, y, z) = \left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Questão 3: Identifique as curvas/superfícies de nível das funções:

(*a*) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2}$ (*b*) $F(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$

Questão 4: Seja $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$ e $y = r^2 - s^2$. Mostre que $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = 4 \frac{\partial z}{\partial x}$.

Questão 5: Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da elipsóide $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$ no ponto $(1, 1, -\frac{1}{2})$.

Questão 6: Seja $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Usando diferenciais, estime o valor de $f(2,01\ , 2,01\ , 2,01)$.

Questão 7: Seja $f(x, y) = uv$, onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são duas funções tais que $u(1, 2) = 3$, $v(1, 2) = 4$, $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 2) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 2) = 3$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 2) = 8$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 2) = -1$. Calcule o gradiente de f no ponto $(1, 2)$.

Questão 8: Ache a derivada direcional da função $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ no ponto $(-2, 2)$ na direção do vetor $-\vec{i} - \vec{j}$.

Questão 9: Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R xe^{xy}\, dxdy$, onde R é a região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Parte B: Responde 2 questões

Questão 10: (Valor 20 pontos)

(a) Seja $f(x, y) = y + x^2$. Esboce as k-curvas de nível da função para $k = -2, 0$ e 2 no mesmo diagrama, indicando cada curva com seu valor de k. Calcule o vetor gradiente ∇f no ponto $(1, 1)$ e indica-lo no diagrama.

(b) Suponha que a função $f(x, y) = 1 - 3x^2 - xy$ descreve a elevação (altitude) no ponto com coordenadas (x, y) em uma paisagem, e você esta posicionado no ponto $(1, 2)$.

(i) Se você move na direção mais acentuada, qual é a taxa inicial da subida?

(ii) Em que direção você estará percorrendo um caminho plano? Expresse este direção com um vetor unitário.

(iii) Se você se mover do ponto $(1, 2)$ para o ponto $(4, 2)$, você estará inicialmente subindo or descendo e qual será sua velocidade?

Questão 11: (Valor 20 pontos)

(a) Seja $f(x, y) = 3x^2 + 6xy - 3y^2 + 4y^3 + 12x + 12y + 10$. Ache os pontos críticos de f e classifique-os (máximo local, mínimo local, sela).

(b) Usando o método de multiplicadores de Lagrange, mostre que o volume máximo de um cilindro circular com área total fixo é igual 1 é $\dfrac{1}{3\sqrt{6\pi}}$.

Questão 12: (Valor 20 pontos)

(a) Calcule $\displaystyle\int\int_R \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$, onde R é a região limitada pelas retas $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$ e $x = 2$.

(b) Expresse a integral $\displaystyle\int\int_R$ sen $(x^2 + y^2)dxdy$, onde R é a região indicado na figura ao lado, como uma integral em coordenadas polares e calcule-la.