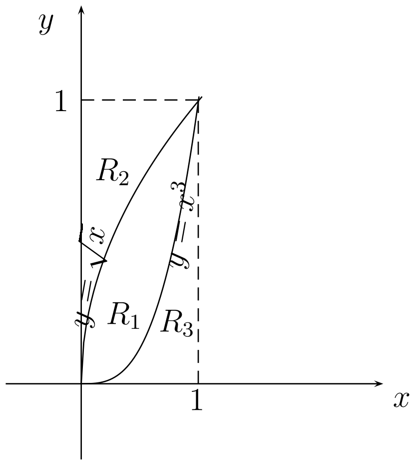
Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo B   Código: MAT A03   Turma: T05
Professor: *Joseph N. A. Yartey*   Data: 27/07/2008
Aluno(a): ______________________________

2ª CHAMADA - PROVA DA UNIDADE I

Questão 1: Coordenadas Cartesianas

Observe a figura ao lado, identifique as regiões R_1, R_2 e R_3 e determine:

I) Cálculo de área, Centróide e Teorema de Pappus-Guldin



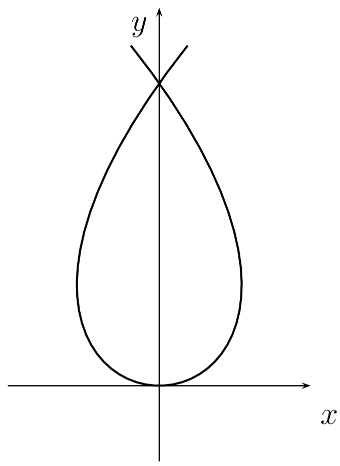
a) Calcule a área da região R_1;
b) Encontre as coordenadas do centróide da região R_1;
c) Utilizando o Teorema de Pappus-Guldin encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região R_1 em torno do eixo OX.

II) Volume de Sólidos de Revolução

Dê apenas a expressão da integral que representa os volumes dos seguintes sólidos:
a) Sólido gerado pela rotação da região R_3 em torno da reta $x = 1$;
b) Sólido gerado pela rotação da região R_2 em torno da reta $y = 0$.

Questão 2: Curvas Parametrizadas

Dada as equações paramétricas da curva $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases}$,
cujo gráfico está representado na figura ao lado. Determine:
a) A orientação da curva, justificando a sua resposta;
b) O comprimento do arco do laço da curva;
c) Encontre a área limitada pelo laço da curva.
d) A equação da reta tangente à curva no ponto em que $t_0 = 2$.

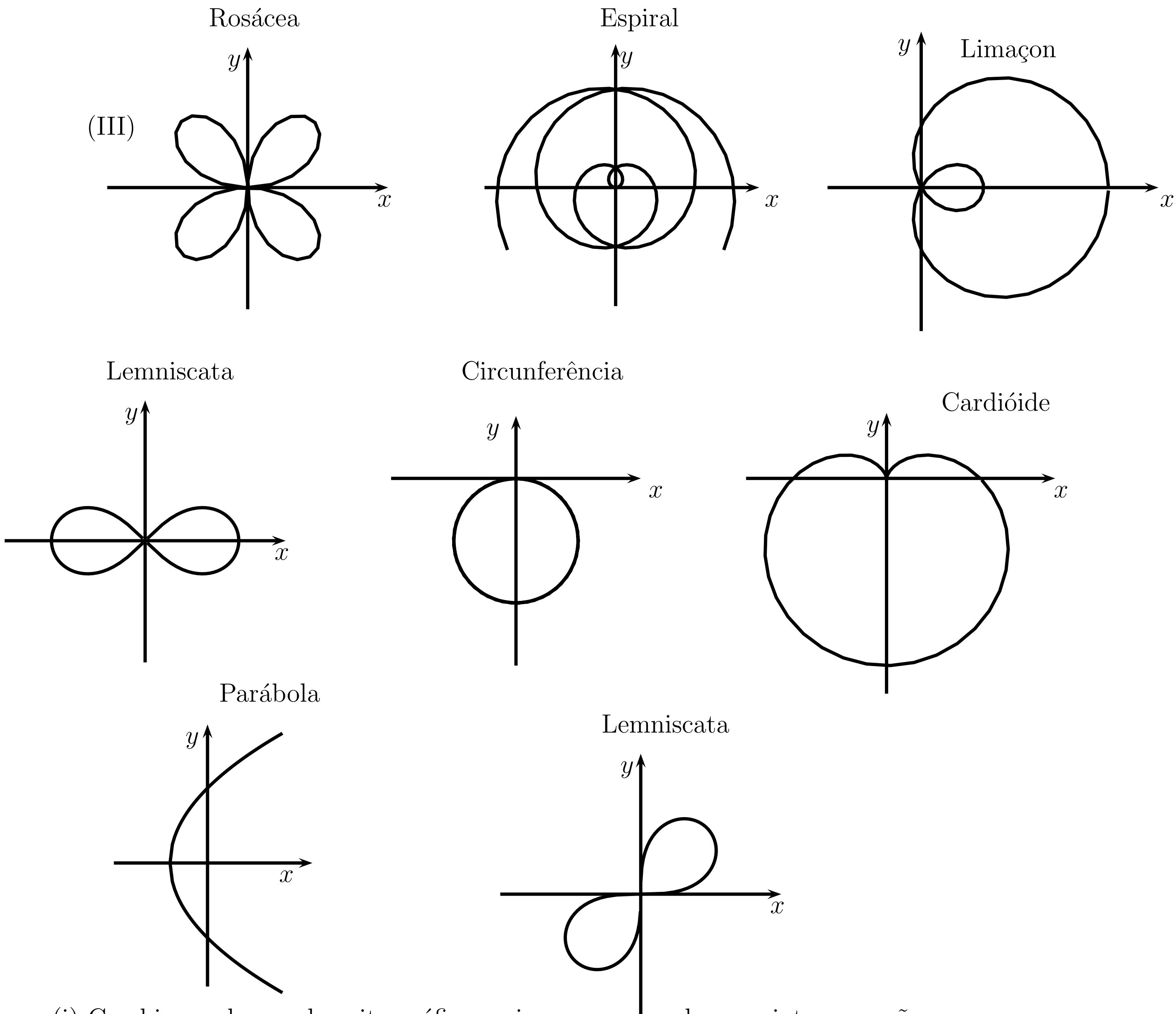


Questão 3: Coordenadas Polares

(I) Seja $c \in \mathbb{R}$. Transformar a reta $y = \sqrt{3}x + c$ em forma polar $r = f(\theta)$, explicitando o intervalo de variação do ângulo polar θ.

(II) Mostre que a equação polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, onde $ab \neq 0$, representa um círculo e calcule seu centro e o raio.

(III)



(i) Combine cada um dos oito gráficos acima com uma das seguintes equações

$(a)\ r = \cos 2\theta$, $\quad (b)\ r\cos\theta = 1$, $\quad (c)\ r = \dfrac{6}{1-\cos 2\theta}$, $\quad (d)\ r = \operatorname{sen} 2\theta$,

$(e)\ r = \theta$, $\quad (f)\ r^2 = \cos 2\theta$, $\quad (g)\ r = 1+\cos\theta$, $\quad (h)\ r = 1-\operatorname{sen}\theta$,

$(i)\ r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$, $\quad (j)\ r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$, $\quad (k)\ r = -\operatorname{sen}\theta$, $\quad (l)\ r = 2\cos\theta + 1$

(ii) Calcule a área do laço interior da limaçon acima.

(iii) Calcule o comprimento do cardióide acima.

Formulas

$$(1)\ \text{Área} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]dx;\ \text{se } y=f(x),\ y=g(x),\ \text{com } f(x)\geq g(x);\ a\leq x\leq b \\[2ex] \displaystyle\int_c^d [f(y)-g(y)]dy;\ \text{se } x=f(y),\ x=g(y),\ \text{com } f(y)\geq g(y);\ c\leq y\leq d \\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta y(t)\frac{dx}{dt}dt;\ \text{se } x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leq t\leq\beta \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [r_1^2-r_2^2]d\theta;\ \text{se } r_1=f(\theta),\ r_2=g(\theta),\ \text{com } f(\theta)\geq g(\theta);\ \theta_1\leq\theta\leq\theta_2 \end{cases}$$

$$(2)\ \text{Comprimento do arco} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx;\ \text{se } y=f(x),\ a\leq x\leq b \\[2ex] \displaystyle\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy;\ \text{se } x=f(y),\ c\leq y\leq d \\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt;\ \text{se } x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leq t\leq\beta \\[2ex] \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta;\ \text{se } r=f(\theta),\ \theta_1\leq\theta\leq\theta_2 \end{cases}$$

(3) Centróide $(\overline{x},\overline{y})$ para a região **cartesiana** $\Omega=\{(x,y): f(x)\geq g(x), a\leq x\leq b\}$ com massa por unidade de área, ρ, constante é dado por

$$\overline{x}=\frac{M_y}{A};\ \text{onde } M_y=\rho\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx\ \text{ e ; } A=\text{área de}(\Omega)$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{A};\ \text{onde } M_x=\rho\int_a^b \frac{1}{2}\Big[(f(x))^2-(g(x))^2\Big]dx\ \text{ e ; } A=\text{área de}(\Omega)$$