Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo B   Código: MAT A03   Turma:
Professor: *Joseph N. A. Yartey*   Data: 24/09/2007
Aluno(a): ______________________________

PROVA DA UNIDADE I

Cada questão vale 2 pontos.

Questão 1:

Seja R a região no plano delimitada pelo eixo y e o gráficos de

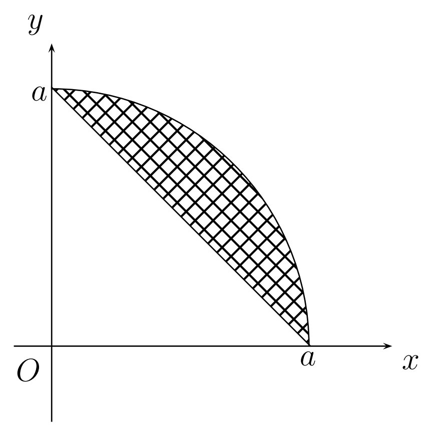
$$f(x) = x^3 \text{ e } g(x) = 4 - 3x.$$

(a) Esboce a região R e calcule o volume do sólido formado quando R é girado em torno eixo y.

(b) A região R é a base de um sólido. Para este sólido, cada seção transversal perpendicular ao eixo x são semi-círculos com diâmetro de $y = f(x)$ até $y = g(x)$. Calcule o volume deste sólido.

Questão 2:

Uma lamina rígida e uniforme, limitada inferiormente por uma reta e superiormente pela a quarta parte de um círculo, está no plano xy, como mostra a figura ao lado. Determine as coordenadas do centróide desta lamina. Agora, a lamina é girada por 2π em torno da reta $x = 2a$. Utilizando o Teorema de Pappos-Guldin, mostre que o volume deste sólido de revolução é $\dfrac{(3\pi - 7)\pi a^3}{3}$.

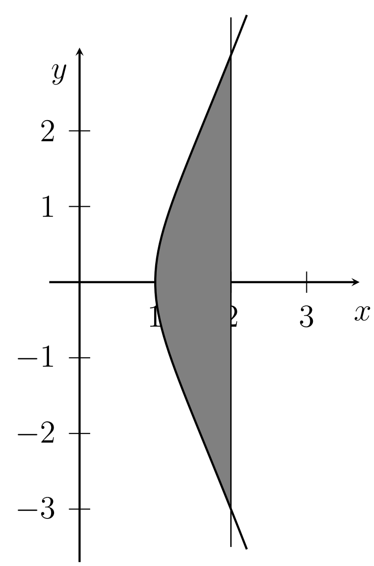


Questão 3:

Seja R a região do plano limitado pela reta $x = 2$ e a curva de equações paramétricas $\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 + 2t \end{cases}$, como mostra a figura ao lado.

(a) Calcule a área de R.

(b) Determine uma expressão em integrais que represente o volume do sólido obtido com a rotação de R em torno da reta $y = 0$.



Questão 4:

As equações paramétricas $\begin{cases} x = 3\cos(2t) \\ y = 1 + \cos^2(2t) \end{cases}$ dão a posição de uma partícula em cada instante t, durante o intervalo de tempo $0 \le t \le \pi$.

(a) Esboce a trajetória da partícula.

(b) Calcule a distância total percorrida pela partícula. Use a integral

$$\left(\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + b^2x^2} + bx}{a}\right| \right)$$

(c) Determine a equação da reta tangente no ponto com $t = \frac{\pi}{6}$.

Questão 5:

(a) Marque o ponto $(2, \frac{\pi}{4})$ no sistema de coordenadas polares e depois escreve 3 outros pontos de coordenadas polares para o mesmo ponto.

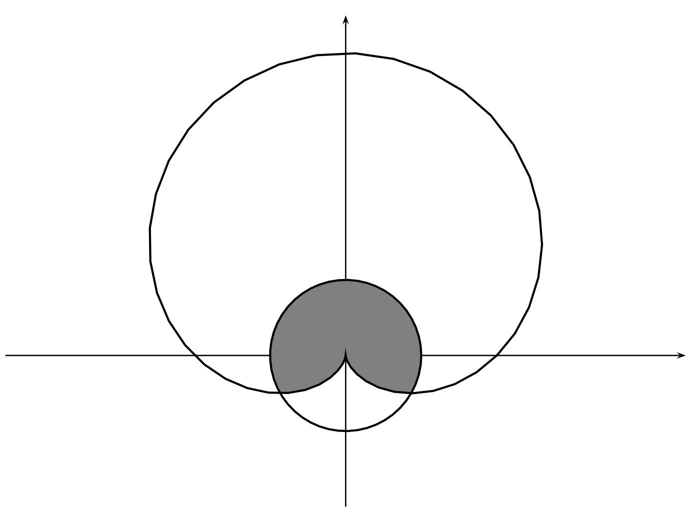
(b) Seja $c \in \mathbb{R}$. Transformar a reta $y = \sqrt{3}x + c$ em forma polar $r = f(\theta)$, explicitando o intervalo de variação do ângulo polar θ.

(c) Mostre que a equação polar $r = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, onde $ab \neq 0$, representa um círculo e calcule seu centro e o raio.

Questão 6:

(a) Ache os pontos de interseção das curvas polares $\begin{cases} r = 4(1 + \operatorname{sen}\theta) \\ r(1 - \operatorname{sen}\theta) = 3 \end{cases}$

(b) Seja R a região do plano interseção do círculo $r = 2$ com o interior da cardióide $r = 4 + 4\operatorname{sen}\theta$, como mostra a figura abaixo. Calcule o comprimento total dos arcos que delimita R.



Formulas

$$(1)\ \text{Área} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]dx;\ \text{se } y = f(x),\ y = g(x),\ \text{com } f(x) \geq g(x);\ a \leq x \leq b \\[2ex] \displaystyle\int_c^d [f(y) - g(y)]dy;\ \text{se } x = f(y),\ x = g(y),\ \text{com } f(y) \geq g(y);\ c \leq y \leq d \\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta y(t)\frac{dx}{dt}dt;\ \text{se } x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [r_1^2 - r_2^2]d\theta;\ \text{se } r_1 = f(\theta),\ r_2 = g(\theta),\ \text{com } f(\theta) \geq g(\theta);\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

$$(2)\ \text{Comprimento do arco} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx;\ \text{se } y = f(x),\ a \leq x \leq b \\[2ex] \displaystyle\int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy;\ \text{se } x = f(y),\ c \leq y \leq d \\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt;\ \text{se } x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta \\[2ex] \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta;\ \text{se } r = f(\theta),\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

(3) Centróide $(\overline{x}, \overline{y})$ para a região **cartesiana** $\Omega = \{(x, y) : f(x) \geq g(x), a \leq x \leq b\}$ com massa por unidade de área, ρ, constante é dado por

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A};\ \text{onde } M_y = \rho\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx\ \text{ e ; } A = \text{área de}(\Omega)$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A};\ \text{onde } M_x = \rho\int_a^b \frac{1}{2}\Big[(f(x))^2 - (g(x))^2\Big]dx\ \text{ e ; } A = \text{área de}(\Omega)$$

(4) Centróide $(\overline{x}, \overline{y})$ para a região **polar** $\Omega = \{(r, \theta) : f(\theta) \geq g(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ com massa por unidade de área, ρ, constante é dado por

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A};\ \text{onde } M_y = \rho\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{3}\Big[r_1^3 - r_2^3\Big] \cos\theta\ d\theta\ \text{ e ; } A = \text{área de } (\Omega)$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A};\ \text{onde } M_x = \rho\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{3}\Big[r_1^3 - r_2^3\Big] \text{sen}\ \theta\ d\theta\ \text{ e ; } A = \text{área de } (\Omega)$$