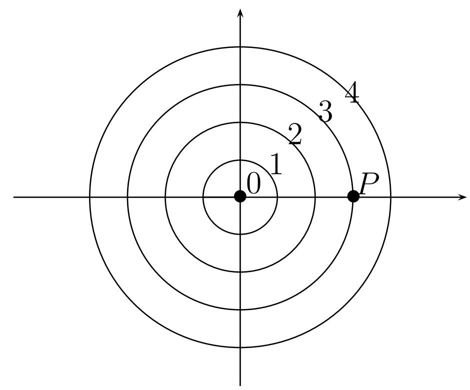
Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo B Código: MAT A03 Turma: T10/T03
Professor: *Joseph Nee Anyah Yartey* Data: 30/06/2007
Aluno(a): ______________________________

PROVA DA UNIDADE III

Parte A: Responde todas as questões - Cada questão vale 8 pontos.

Questão 1: Responda VERDADEIRO ou FALSO.

(a) O diagrama ao lado mostra as curvas de nível de uma função $f(x,y)$. A derivada direcional $f_{\vec{u}}(x,y)$ no ponto P na direção $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é positiva.



(b) Para uma função, $g(x,y)$, a derivada direcional no ponto (x_0,y_0) é um vetor no plano xy.

(c) Para uma função $h(x,y)$, se ambas as derivadas parciais forem contínuas, então a função é diferenciável.

(d) Para $g(x,y,z)$, $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ é ortogonal a superfície de nível $g(x,y,z)=2$ no ponto (x_0,y_0,z_0).

(e) Seja $f(x,y)$ uma função contínua, então $\int_{y=0}^{1}\int_{x=\sqrt{y}}^{1} f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{1} f(x,y)dydx$.

Questão 2: Suponha que $z=f(x,y)$ é dado implicitamente pela equação $x^3+y^3+z^3+6xyz=4$. Ache a derivada partial $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(x,y,z)=(1,-1,-2)$.

Questão 3: Identifique as curvas/superfícies de nível das funções:

(a) $f(x,y) = e^{-4x^2-y^2}$ (b) $F(x,y,z) = 2x+3y+6z$

Questão 4: Seja $w=f(u,v)$, onde $u=\frac{x}{y}$ e $v=\frac{z}{y}$. Mostre que $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Questão 5: Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função $z = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ no ponto $(-1,0,0)$.

Questão 6: Seja $f(x,y)=e^{x-y}$. Usando diferenciais, estime o valor de $f(\ln 2 + 0,1\ ,\ \ln 2 + 0,04)$.

Questão 7: Seja $f(x,y)=uv$, onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são duas funções tais que $u(1,2)=3$, $v(1,2)=4$, $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,2)=3$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,2)=8$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(1,2)=-1$. Calcule o gradiente de f no ponto $(1,2)$.

Questão 8: Em que direção a derivada direcional da função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no ponto $(1,1)$ é igual zero?

Questão 9: Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R x\cos(xy)dxdy$, onde R é a região

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x\le 2,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}.$$

Parte B: Responde 2 questões

Questão 10: (Valor 20 pontos)

(a) Seja $f(x,y) = y + x^2$. Esboce as k-curvas de nível da função para $k = -2, 0$ e 2 no mesmo diagrama, indicando cada curva com seu valor de k. Calcule o vetor gradiente ∇f no ponto $(1,1)$ e indica-lo no diagrama.

(b) Suponha que a função $f(x,y) = 1 - 3x^2 - xy$ descreve a elevação (altitude) no ponto com coordenadas (x,y) em uma paisagem, e você esta posicionado no ponto $(1,2)$.

(i) Se você move na direção mais acentuada, qual é a taxa inicial da subida?

(ii) Em que direção você estará percorrendo um caminho plano? Expresse este direção com um vetor unitário.

(iii) Se você se mover do ponto $(1,2)$ para o ponto $(4,2)$, você estará inicialmente subindo or descendo e qual será sua velocidade?

Questão 11: (Valor 20 pontos)

(a) Seja $f(x,y) = 3x^2 + 6xy - 3y^2 + 4y^3 + 12x + 12y + 10$. Ache os pontos críticos de f e classifique-os (máximo local, mínimo local, sela).

(b) Usando o método de multiplicadores de Lagrange, mostre que o volume máximo de um cilindro circular com área total fixo é igual 1 é $\dfrac{1}{3\sqrt{6\pi}}$.

Questão 12: (Valor 20 pontos)

(a) Calcule $\displaystyle\int\int_R \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, onde R é a região limitada pelas retas $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$ e $x = 2$.

(b) Expresse a integral $\displaystyle\int\int_R \text{sen}\,(x^2+y^2)dxdy$, onde R é a região indicado na figura ao lado, como uma integral em coordenadas polares e calcule-la.