DISCIPLINA: CALCULO B

UNIDADE III - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizado 2008.2

Domínio, Imagem e Curvas/Superfícies de Nível

[1] Determine o domínio de cada uma das funções abaixo e represente-o graficamente:

(1.1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-1} + \sqrt{y-x^2}$ (1.2) $f(x,y) = \sqrt{y^2-4}\,\ln(x-y)$

(1.3) $f(x,y) = \ln(x^2-y^2)$ (1.4) $f(x,y) = \ln\left[\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\right]$

(1.5) $f(x,y) = \arccos(x-y)$ (1.6) $f(x,y) = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{x^2}{4}+y^2\right)$

[2] Determine o domínio; determine e trace as interseções do gráfico com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível; e esboce o gráfico das funções:

(2.1) $f(x,y) = 16-x^2-y^2$ (2.2) $f(x,y) = 9x^2+4y^2$

(2.3) $f(x,y) = x^2$ (2.4) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

(2.5) $f(x,y) = 8-2x-4y$ (2.6) $f(x,y) = \dfrac{4}{x^2+4y^2}$

(2.7) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$

[3] Descreva as curvas/superfícies de nível da cada função:

(3.1) $f(x,y) = e^{-4x^2-y^2}$ (3.2) $F(x,y,z) = 2x+3y+6z$

(3.3) $F(x,y,z) = x^2-y^2+z^2$

Limites e Continuidade

[4] Mostre que $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y)$ não existe se:

(4.1) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ e $P_0(0,0)$

(4.2) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$ e $P_0(0,0)$

(4.3) $f(x,y) = \dfrac{y^3 - (x-2)^4}{2(x-2)^3 + y^3}$ e $P_0(2,0)$

(4.4) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{y-1}$ e $P_0(0,1)$

(4.5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y-4)(x^2+xy)}{(x-1)+(y-3)}; & \text{se } y \neq 4-x \\ 2; & \text{se } y = 4-x \end{cases}$ e $P_0(1,3)$

(4.6) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ e $P_0(0,0)$

(4.7) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2-4y^2}$ e $P_0(0,0)$

[5] Usando coordenadas polares, ou contrario, determine o valor dos seguintes limites :

(5.1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(5.2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\,(x^2+y^2)$

(5.3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\Big)$

(5.4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\Big(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\Big)$

(5.5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2}$

(5.6) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{\operatorname{arcsen}(xy-2)}{\operatorname{arctg}(3xy-6)}$

(5.7) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

[6] Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos ou ao longo das retas indicadas:

(6.1) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $(0,0)$

(6.2) $f(x,y) = \dfrac{x}{3x+5y}$; $(0,0)$

(6.3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $(0,0)$

(6.4) $f(x,y) = \begin{cases} 1-x & \text{se } y \geq 0 \\ -2 & y < 0 \end{cases}$; $y = 0$

(6.5) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq y \\ 2 & x < y \end{cases}$; $x = y$

(6.6) $f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2+(y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (2,1) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (2,1) \end{cases}$; $(2,1)$

Derivadas Parciais de 1ª ordem

[7] Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

(7.1) $z = \int_{x^2}^{2y^2} e^{-t^2}\, dt$ (7.2) $z = \text{ arcsen}(\sqrt{xy})$ (7.3) $z = e^{y/x} \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$

(7.4) $w = xyz + z \text{ sen }(xyz)$ (7.5) $w = \ln(x^2y^3z^4)$ (7.6) $w = \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$

[8] Para as funções abaixo calcule, caso exista, as derivadas parciais, nos pontos indicados:

(8.1) $f(x,y) = x \cos\left(\dfrac{x}{y} + \pi\right)$; $P_0(0,1)$

(8.2) $f(x,y) = \text{ arctg}\sqrt{4x^2 - y^2}$; $P_0(1,1)$

(8.3) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \left(\text{ sen }^2 y\right) \text{tg } z$; $P_0(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

(8.4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+2y}{x^2-y} & ;\text{ se } y \neq x^2 \\ 3 & ;\text{ se } y = x^2 \end{cases}$; $P_0(1,0)$ e $P_1(1,1)$.

[9] Verificar a identidade proposta para cada função dada:

(9.1) $z = xy^3 - x^3y$; $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^4 - x^4$

(9.2) $w = \ln(e^x + e^y + e^z)$; $\quad \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 1$

(9.3) $z = x\ln(x^2+y^2) - 2y \text{ arctg}(\frac{y}{x})$; $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + 2x$

(9.4) $z = \dfrac{x-y}{xy}$; $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = -z$

[10] Ligando-se em paralelo n resistências $R_1,\ R_2, \cdots, R_n$, a resistência total R é dada por $\dfrac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{R_i}$. Verifique que $\dfrac{\partial R}{\partial R_i} = \left(\dfrac{R}{R_i}\right)^2$.

Diferenciabilidade

[11] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

[12] Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

[13] Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de:

(13.1) $z = x^3y - 2x^2y^2 + 5xy - 2x$ (13.2) $z = x \cos(xy) - y \operatorname{sen}(xy)$

(13.3) $z = \cos(x^3 + xy)$ (13.4) $z = e^{x^2+y^2}$

(13.5) $w = e^{xyz}$ (13.6) $w = x^2y^3z^4$

[14] Provar as identidades:

(14.1) $f(x,t) = \operatorname{sen}(ap\,x)\operatorname{sen}(p\,t)$; $\quad a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(14.2) $V(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$; $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$; f e g são funções deriváveis.

[15] Uma função f de x e y é harmônica se satisfazem à equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Prove que as funções a seguir são harmônicas:

(15.1) $f(x,y) = e^{-x}\cos(y)$

(15.2) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

(15.3) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x > 0$.

Regra da Cadeia

[16] Usando a regra da cadeia para $z = f(x,y)$ e $w = f(x,y,z)$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$ e $\dfrac{dw}{dt}$:

(16.1) $z = x^2 + 2y^2$, $x = \operatorname{sen}(t)$, $y = \cos(t)$

(16.2) $z = \operatorname{arctg}(\dfrac{y}{x})$, $x = \ln(t)$, $y = e^t$

(16.3) $w = e^{-x}y^2\operatorname{sen}(z)$, $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$

(16.4) $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t$, $y = e^t\cos(t)$, $z = e^t\operatorname{sen}(t)$

[17] Usando a regra da cadeia para $z = f(x,y)$ e $w = f(x,y,z)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, e $\dfrac{\partial w}{\partial r}$:

(17.1) $z = x^2 - y^2$, $x = 3t - s$, $y = t + 2s$

(17.2) $z = e^{\frac{y}{x}}$, $x = 2s\cos(t)$, $y = 4s\operatorname{sen}(t)$

(17.3) $w = xy + yz + zx$, $x = tr$, $y = st$, $z = ts$

(17.4) $w = \ln(xy + yz + zx)$, $x = t^2r$, $y = st^2$, $z = t^2s$

[18] Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$.
Seja $g(x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule:

(18.1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ (18.2) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

[19] Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = f(x,y)$. Se $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$ e $f(1,1) = 1$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1)$.

[20] Seja $f(x,y) = g\Big(x^2y, x^3y^2\Big)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Sabendo-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 16$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 8$, calcule as derivadas parciais de g no ponto $(4,8)$.

[21] Considere $f(x,y) = \ln\,(xy^2) + \operatorname{arctg}(x^2 - y)$.

(21.1) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3)$.

(21.2) Se $x = g(u,v) = uv + 2v,\ y = h(u,v),\ h(0,1) = 3,\ \dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1) = -4$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1)$.

[22] Seja $f(x,y,z) = g\Big(e^{xyz}, x^2y^2z^2\Big)$. Determine o valor da constante β, sabendo-se que

$$\beta x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

[23] Suponha que $w = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Prove que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x\cos\theta + f_y\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x\,\text{sen}\,\theta + f_y\cos\theta$$

Resolva estas equações por f_x e f_y em termos de $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ e deduza que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

[24] Suponha que $w = f(u,v)$, onde $u = e^x\cos y$ e $v = e^x\,\text{sen}\,y$, prove que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = (u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right].$$

[25] Seja z uma função de x e y onde $x = u+v$ e $y = u-v$. Expressa $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.
(Pode assumir igualdade para as derivadas parciais mistas de segunda ordem)

[26] Suponha que f é uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordens continuas e que $g(x,y) = f(u,v)$, onde $u(x,y) = 2x + y$ e $v(x,y) = -x + 2y$. Use a regra da cadeia para verificar que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 5\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

Diferencial Total

[27] Seja $f(x,y) = e^{x-y}$. Usando a diferencial total, calcule o valor de

$$f\Big((\ln 2) + 0.1\ ,(\ln 2) + 0.04\Big).$$

[28] Seja $w = (xyz)^{3/2}$.

(28.1) Ache o diferencial de w.

(28.2) Use diferenciais para estimar o erro máximo no valor de w, com um possíveis erros no máximo de $\pm 0,1$ em cada um dos três números x, y e z, se x, y e z são números reais positivos menores ou iguais 4.

[29] Use a diferencial total para encontrar aproximadamente o erro máximo no cálculo da área de um triângulo retângulo, cujos catetos têm como medida 6 *cm* e 8 *cm* respectivamente, com um possível erro de $0,1$ *cm* para cada medida. Encontre também a porcentagem aproximada de erro.

[30] Uma industria vai produzir 10.000 caixas fechadas de papelão, com dimensões 3 *cm*, 4 *cm* e 5 *cm*. O custo do papelão a ser usado é de $\mathbb{R}\$0,05$ por cm^2. Se as maquinas usadas para cortar os pedaços de papelão têm um possível error de $0,05$ *cm* em cada dimensão, encontrar aproximadamente, usando diferencial total, o máximo erro possível na estimativa do custo do papelão.

[31] Determinar o maior erro cometido no cálculo da aceleração da gravidade através de um pêndulo cujo período é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Considerar o comprimento do pêndulo igual a 1 *m* com um erro admissível de $0,05$ *cm* e $T = 2$ *seg* com um erro admissível de $0,01$ *seg*.

Derivadas Parciais como Taxa de Variação

[32] Um cone tem altura igual a 10 *m* e o raio 4 *m*; o crescimento da altura é de $\frac{1}{2}$ m/seg e o raio $\frac{1}{4}$ m/seg. Qual a velocidade de crescimento do volume do cone?

[33] Determinar a rapidez com que está mudando o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z. Sabe-se que aresta x aumenta 2 cm por segundo, a y diminui 1 cm por segundo e a z aumenta 2 cm por segundo. No momento considerado $x = 8\ cm,\ y = 10\ cm,\ z = 12\ cm$.

[34] Considere a lei de um gás ideal confinado, $PV = kT$, para $k = 10$. Determine a taxa de variação da temperatura no instante em que o volume do gás é de 120 cm^3 e o gas está sob pressão de 8 N/cm^2, sabendo que o volume cresce à razão de 2 cm^3/seg e a pressão decresce à razão de $0,1$ N/cm^2.

[35] Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é 6 cm e cresce à taxa de 1 cm/seg e o comprimento do outro lado é 10 cm e decresce à taxa de 2 cm/seg. Encontre a taxa de variação da área do retângulo, no dado instante.

[36] Em um dado instante, o comprimento de cateto de um triângulo retângulo é 10 cm e cresce à razão de 1 cm/min e o comprimento do outro é 12 cm e decresce à razão de 2 cm/min. Encontre a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao cateto de 12 cm de comprimento, no dado instante.

Diferenciação Implícita

[37] Suponha que $z = f(x, y)$ é definida implicitamente como uma função de x e y pela equação $x^{2/3} + 2y^{2/3} + 3z^{2/3} = 1$, onde $x, y,$ e z sao números reais positivas. Usando derivação implícita, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

[38] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $xyz = \cos(x+y+z)$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0, \pi/4, \pi/4)$.

[39] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $y + x^{(z-1)} + y^2 z = 1$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2, 0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2, 0)$.

[40] Se $F(x, y) = 0$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$.

Plano Tangentes, Reta Tangentes e Normais

[41] Encontre a equação do plano tangente e da reta normal a cada superfície abaixo, nos pontos indicados:

(41.1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ em $P = (1, 1, 1)$

(41.2) $xyz = 6$ no ponto cuja projeção no plano $y = 0$ é $(1, 0, 3)$

(41.3) $\cos(xy) + \operatorname{sen}(yz) = 0$ em $P = (1, \pi/6, -2)$

(41.4) $x^3 + y^3 + z - 6xy = 0$ para $x = y = 2$

(41.5) $g(x, y) = x^y$ em $(1, 1, 1)$

[42] Determine o plano tangente ao gráfico de $z = xy$ que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$.

[43] Dada a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, determine as equações dos planos tangentes que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

[44] Ache os pontos da superfície $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x = 0$ para os quais os planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

[45] Ache um vetor normal e a equação da reta tangente a cada curva no ponto indicado:

(45.1) $x^2 + y^2 = 2,\ P_0(1, 1)$ (45.2) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4,\ P_0(1/2, 1)$

[46] Encontre o vetor direção da reta tangente no ponto dado da curva C que é interseção das superfícies:

(46.1) $xz + 2x + 4z = 5$ e $4xy + 3y + 6z = 56$, no ponto $(2, 5, 1/6)$.

(46.2) $x^2 - 2xz + y^2z = 1$ e $3xy + 2yz = -6$, no ponto $(1, -2, 0)$.

Linearização

[47] Determine a aproximação linear das seguintes funções proximo aos pontos indicados:

(47.1) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2};\ (1, 1)$ (47.2) $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y^2};\ (2, 1)$

(47.3) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2);\ (1, 0)$ (47.4) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ (1, 1, 1)$

[48] Considere a função $w = f(x, y, z) = x^2y\sqrt{z}$.

(48.1) Determine a aproximação linear (ou linearização) para esta função no ponto $(1, 2, 4)$.

(48.2) Use a aproximação para calcular um valor aproximado de $0.99^2.2.\sqrt{4.02}$.

Derivada direcional e gradiente

[49] Calcule o gradiente das seguintes funções:

(49.1) $z = 2x^2 + 5y^2$ (49.2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

(49.3) $w = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ (49.4) $w = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz)$

(49.5) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ (49.6) $w = e^z \cos(2x)\cos(3y)$

[50] Determine a derivada direcional da função dada na direção $\vec{v}$:

(50.1) $z = 2x^2 + 5y^2,\ \vec{v} = (\cos(\frac{\pi}{2}),\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))$

(50.2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2},\ \vec{v} = (1, 1)$

(50.3) $z = y^2 \operatorname{tg}^2(x),\ \vec{v} = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$

(50.4) $w = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz),\ \vec{v} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

(50.5) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2),\ \vec{v} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, -1)$

(50.6) $w = e^{1+x^2+y^2+z^2},\ \vec{v} = (1, 0, 1)$

[51] Determine o valor máximo da derivada direcional da função f no ponto dado e a direção em que ocorre:

(51.1) $z = 2x^2 + 3y^2,\ P = (1, -1)$

(51.2) $z = e^{2y} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{3x}\right),\ P = (1, 3)$

(51.3) $w = \cos(yz) + \operatorname{sen}(xy),\ P = (-3, 0, 7)$

(51.4) $w = 2xyz + y^2 + z^2,\ P = (1, 1, 1)$

[52] Suponha que numa certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

(52.1) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

(52.2) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(52.3) Qual a taxa máxima de variação em P?

[53] Uma equação da superfície de uma montanha é $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, a distância está em metros, os pontos do eixo x a leste e os pontos do eixo y a norte. Um alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$.

(53.1) Qual é a direção da parte que tem inclinação mais acentuada?

(53.2) Se o alpinista se mover na direção leste ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(53.3) Se o alpinista se mover na direção sudoeste, ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(53.4) Em qual direção ele estará percorrendo um caminho plano?

[54] Uma chapa de metal aquecida em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distância da origem. Se a temperatura em $P(3,4)$ é $100°$, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P? Em que direção a taxa de variação é nula?

Pontos Críticos

[55] Determine e classifique os pontos críticos de:

(55.1) $z = e^{1+x^2+y^2}$

(55.2) $z = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

(55.3) $z = (x^2 - 1)(y^2 - 4)$

(55.4) $z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{64}{y} + xy$

(55.5) $z = \dfrac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$

(55.6) $z = 6y^2 - 8x^2 + \dfrac{1}{3}y^3 - \dfrac{1}{4}y^4$

(55.7) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$

(55.8) $z = y^2x + 2yx + 2x^2 - 3x$

Multiplicadores de Lagrange

[56] Determine a distância mínima entre $4x^2 + 4y - z = 0$ e o ponto $(0,0,8)$.

[57] Determine as dimensões do retângulo de menor perímetro e de área 16 cm^2.

[58] Uma aplicação num doente de x miligramas de um remédio A e y miligramas de um medicamento B ocasiona uma resposta $R = R(x,y) = x^2y^3(c - x - y)$, $(c > 0)$. Que quantidade de cada remédio dará a melhor resposta?

[59] O custo do material utilizado na fabricação de uma caixa retangular sem tampa, deve ser $\mathbb{R}\$10,00$. Se o material para o fundo da caixa custa 15 centavos por centímetro quadrado e o material para os lados custa 30 centavos por centímetro quadrado, encontre as dimensões da caixa de volume máximo que pode ser fabricada.

[60] Determine os pontos extremos de:

(60.1) $z = 25 - x^2 - y^2$ tais que $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(60.2) $z = x^2 + 2xy + y^2$ tais que $x - y = 3$.

(60.3) $z = 4x^2 + 2y^2 + 5$ tais que $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

(60.4) $w = x^2 + y^2 + z^2$ tais que $3x - 2y - 4 = 0$.

(60.5) $w = x + y + z$ tais que $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.

[61] De todos os triângulos de perímetro fixo, determine o de maior área.

[62] Determine o ponto P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e o ponto Q na reta $x + y = 4$ tal que a distância de P a Q seja a menor possível.

[63] Suponha que a temperatura de um ponto (x, y, z) é dado por $x + 2y + 3z$. Determine as temperaturas extremas (maxima e minima) na esfera de raio 1 centrado na origin, e ache os pontos onde estas temperaturas extremas são atingidas.

[64] Mostre que o volume do maior paralelepípedo retangular que pode ser inscrito num elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2$ é $\dfrac{8abc}{3\sqrt[3]{3}}$.

[65] Mostre que o volume máximo de um cilindro circular com área total fixo é igual 1 é $\dfrac{1}{3\sqrt{6\pi}}$.

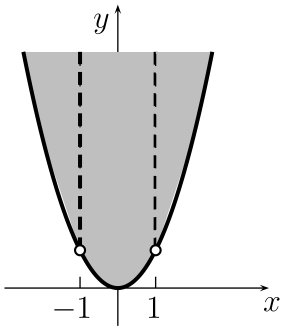
[66] Determine os pontos na superfície $xyz = 1$ que são proximo à origem.

[67] Uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume de $32m^3$. Encontre as dimensões da caixa que tem a menor área superficial.

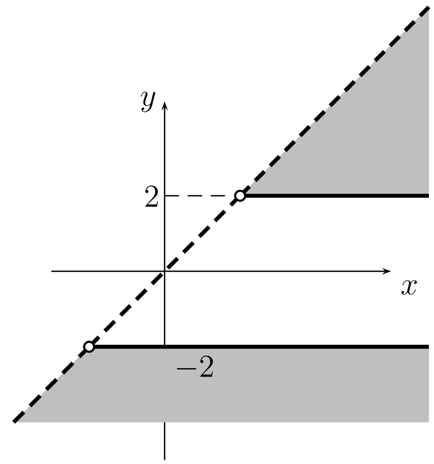
Respostas

[1]

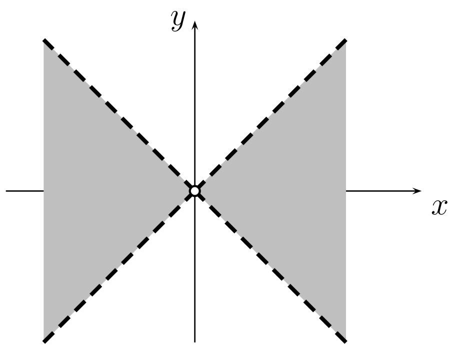
(1.1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \neq 0 \text{ e } y \geq x^2\}$



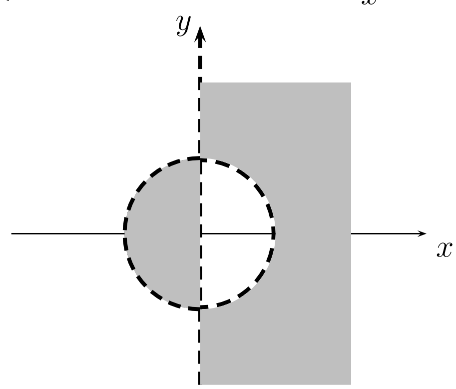
(1.2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2 \text{ ou } y \leq -2 \text{ e } x > y\}$



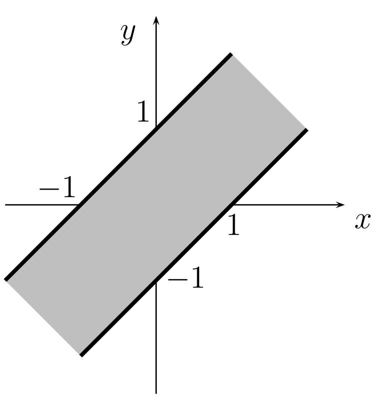
(1.3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 > 0\}$



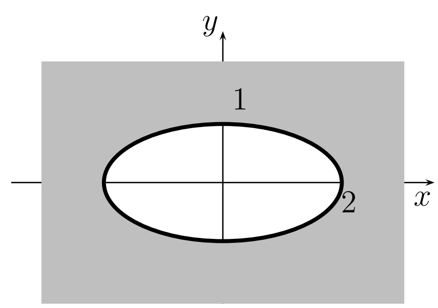
(1.4) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0 \text{ e } \dfrac{x^2+y^2-1}{x} > 0\right\}$



(1.5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x - y \leq 1\}$



(1.6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq -1 \text{ ou } \dfrac{x^2}{4} + y^2 \geq 1\}$



[3]

$$(3.1)\begin{cases} k<0, \text{ curvas de nível é vazio} \\ 0<k<1, \text{ curvas de nível são elipses de semi eixos } \dfrac{\sqrt{-\ln k}}{2} \text{ e } \sqrt{-\ln k} \\ k=1, \text{ cuvras de nível é o ponto } (0,0) \\ k>1, \text{ curvas de nível é vazio} \end{cases}$$

$$(3.2)\begin{cases} \text{Para } w=k,\ 2x+3y+6z=k, \text{ representa uma família de planos paralelos} \\ \text{de normal } (2,3,6), \text{ para qualquer } k. \end{cases}$$

$$(3.3)\begin{cases} k<0,\ x^2-y^2+z^2=k, \text{ superfícies de nível são hiperbolóides de 2 folhas} \\ k=0,\ x^2-y^2+z^2=0, \text{ superfícies de nível são cones circular} \\ k>0,\ x^2-y^2+z^2=k, \text{ superfícies de nível são hiperbolóides de 1 folha} \end{cases}$$

$$[5]\ \Big\{\ (5.1)\ \infty \quad (5.2)\ 0 \quad (5.3)\ \frac{\pi}{2} \quad (5.4)\ 1 \quad (5.5)\ 1 \quad (5.6)\ \frac{1}{3} \quad (5.7)\ \frac{1}{4}$$

$$[6]\begin{cases} (6.1)\ \text{contínua} & (6.2)\ \text{contínua} \quad (6.3)\ \text{descontínua} \\ (6.4)\ \text{descontínua} & (6.5)\ \text{descontínua} \quad (6.6)\ \text{contínua} \end{cases}$$

[7]

$$(7.1)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2xe^{-x^4} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4ye^{-4y^4} \end{cases} \qquad (7.2)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x-x^2y}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y-xy^2}} \end{cases}$$

$$(7.3)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \Big[\dfrac{-y}{x^2}\ln\big(\dfrac{x^2}{y^2}\big)+\dfrac{2}{x}\Big]e^{y/x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \Big[\dfrac{1}{x}\ln\big(\dfrac{x^2}{y^2}\big)-\dfrac{1}{y}\Big]e^{y/x} \end{cases} \qquad (7.4)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = yz+yz^2\cos(xyz) \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = xz+xz^2\cos(xyz) \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = xy+\operatorname{sen}(xyz)+xyz\cos(xyz) \end{cases}$$

$$(7.5)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 2/x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 3/y \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 4/z \end{cases} \qquad (7.6)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2+z^2-2x(y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2+z^2-2y(x+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{x^2+y^2-z^2-2z(x+y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{cases}$$

$$[8]\begin{cases} (8.1)\ f_x(P_0)=-1,\ f_y(P_0)=0 & (8.2)\ f_x(P_0)=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ f_y(P_0)=\dfrac{-\sqrt{3}}{12} \\ (8.3)\ f_x(P_0)=\dfrac{1}{4},\ f_y(P_0)=1,\ f_z(P_0)=1 & (8.4)\ f_x(P_0)=0,\ f_y(P_0)=5, \nexists f_x(P_1), \nexists f_y(P_1) \end{cases}$$

[13]

$$(13.1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy-4y^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4x^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2-8xy-5 \end{cases}$$

$$(13.2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x}=(y^3-2y)\text{ sen }(xy)-xy^2\cos(xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y}=x^2y\text{ sen }(xy)-(x^3+2x)\cos(xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(xy^2-2x)\text{ sen }(xy)-(x^2y+2y)\cos(xy) \end{cases}$$

$$(13.3)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6x\text{ sen }(x^3+xy)-(3x^2+y)^2\cos(x^3+xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\cos(x^3+xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\text{ sen }(x^3+xy)-x(3x^2+y)\cos(x^3+xy) \end{cases}$$

$$(13.4)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2+4x^2)e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2+4y^2)e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(13.5)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=y^2z^2e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=x^2z^2e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=x^2y^2e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=(z+xyz^2)e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=(y+xy^2z)e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=(x+x^2yz)e^{xyz} \end{cases}$$

$$(13.6)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=2y^3z^4 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=6x^2yz^4 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=12x^2y^3z^2 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=6xy^2z^4 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=8xy^3z^3 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=12x^2y^2z^3 \end{cases}$$

$$[16]\begin{cases} (16.1)\ -2\text{ sen }t\cos t & (16.2)\ \dfrac{e^t(-1+t\ln t)}{t[e^{2t}+(\ln t)^2]} \\ (16.3)\ e^{-t}[-4t^2\text{ sen }(3t)+8t\text{ sen }(3t)+12t^2\cos(3t)] & (16.4)\ 4e^{2t} \end{cases}$$

[17]

$$(17.1)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = 16t - 10s \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} = -10t - 6s \end{cases} \qquad (17.2)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = 2\sec^2 t.e^{2\,\mathrm{tg}\,t} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

$$(17.3)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = 2st(2r+s) \\ \dfrac{\partial w}{\partial s} = 2t^2(r+s) \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} = 2st^2 \end{cases} \qquad (17.4)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{4}{t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{2(r+s)}{s(2r+s)} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{2}{2r+s} \end{cases}$$

[18] $\{$ (18.1) 4 (18.2) -4

[19] 17

[20] $\left\{ \dfrac{\partial g}{\partial u}(4,8) = 10 \right.$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(4,8) = -2$

[21] $\left\{ (21.1)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3) = 2 \right.$ (21.2) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1) = \dfrac{17}{6}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1) = -54$

[22] $\beta = 2$ [27] $1,06$

[28] $\left\{ (28.1)\ dw = \dfrac{3}{2}\Big[x^{1/2}(yz)^{3/2}\ dx + y^{1/2}(xz)^{3/2}\ dy + z^{1/2}(xy)^{3/2}\ dz\Big] \right.$ (28.2) $|dw| \leq 57,6$

[29] $0,7$cm; $0,29\%$ [30] $\mathbb{R}\$1200$ [31] $1,05\pi^2$

[32] $\dfrac{28\pi}{3}\ m^3/seg$ [33] $304cm^2/seg$ [34] $0,4°/seg$ [35] $-2\ cm^2/seg$ [34] $\dfrac{-8}{61}\ rad/min$

[36] $\dfrac{-z^{1/3}}{3x^{1/3}}$ [37] $\dfrac{-\pi^2}{16} - 1$ [38] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0) = \dfrac{-1}{\ln 2}$

[41]

$$(41.1)\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{6} \end{cases} \qquad (41.2)\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 18 \\ x - 1 = 2y - 4 = 3z - 9 \end{cases}$$

$$(41.3)\begin{cases} \pi x + 18y - \pi z = 6\pi \\ \dfrac{x-1}{\pi} = \dfrac{y - \frac{\pi}{6}}{18} = -\dfrac{z+2}{\pi} \end{cases} \qquad (41.4)\begin{cases} z = 8 \\ (x,y,z) = (2,2,0) + t(0,0,1);\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(41.5)\begin{cases} z - x = 0 \\ (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,0,-1);\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

[42] $x + 6y - 2z - 3 = 0$ [43] $x + 4y + 6z = 21$ e $x + 4y + 6z = -21$

[44] Não existe tangente à superfície paralelo ao plano $z = 0$.
Os planos tangentes à superfície nos pontos $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$ são paralelos ao plano $y = 0$
Os planos tangentes à superfície nos pontos $(0,0,0)$ e $(2,0,0)$ são paralelos ao plano $x = 0$

[45] (45.1) $2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$; $x + y - 2 = 0$
(45.2) $4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$; $4x + y - 3 = 0$

[46] (46.1) $\Big(-66, 107, \dfrac{143}{6}\Big)$
(46.2) $(6, 4, -6)$

[47] (47.1) $L(x,y) = \dfrac{5}{2} - x - y$ (47.2) $L(x,y) = 1 - x + 2y$
(47.3) $L(x,y) = 2x - 2$ (47.4) $L(x,y,z) = -3 + 2x + 2y + 2z$

[48] (48.1) $L(x,y,z) = -10 + 8x + 2y + \dfrac{1}{2}z$ (48.2) 3.93

[49] (49.1) $2(5x,\ 5y)$ (49.2) $\dfrac{-2}{(x^2+y^2)^2}\Big(x,\ y\Big)$ (49.3) $2(3x,\ y,\ -4z)$
(49.4) $\Big(-y \text{ sen } (xy),\ -x \text{ sen } (xy) + z \cos(yz),\ y\cos(yz)\Big)$
(49.5) $\Big(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Big)$
(49.6) $e^z\Big(-2 \text{ sen } (2x)\cos(3y),\ -3\cos(2x) \text{ sen } (3y),\ \ \cos(2x)\cos(3y)\Big)$

[50] (50.1) $10y^2$ (50.2) $\dfrac{-2\sqrt{2}(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$
(50.3) $-y \text{ tg } x(\sqrt{3}y \sec^2 x - \text{ tg } x)$ (50.4) $\dfrac{1}{3}\Big[(y-2x) \text{ sen } (xy) + (2z+2y)\cos(yz)\Big]$
(50.5) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\dfrac{x-y-z}{x^2+y^2+z^2}\Big]$ (50.6) $\sqrt{2}(x+z)e^{1+x^2+y^2+z^2}$

[51] (51.1) $2\sqrt{13}$, $\vec{v} = (4,-6)$ (51.2) $\dfrac{e^6}{6}\sqrt{9\pi^2+6\pi+10}$, $\vec{v} = \dfrac{e^6}{6}(3, 3\pi+1)$
(51.3) 3, $\vec{v} = (0,-3,0)$ (51.4) 6, $\vec{v} = (2,4,4)$

[52] (52.1) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ (52.2) $(38, 6, 12)$ (52.3) $2\sqrt{406}$

[53] (53.1) $\Big(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\Big)$ (53.2) subindo a 60 m por m
(53.3) descendo a $20\sqrt{2}$ m por m (53.4) $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big)$ ou $\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big)$

[54] $-\dfrac{28}{\sqrt{2}}$; $(-12,-16)$; $\lambda(4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j})$; $\lambda \neq 0$

[55]
(55.1) $(0,0)$ ponto min (55.2) $\Big(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\Big)$ ponto max
(55.3) $(0,0)$ max ; $(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)$ selas (55.4) $\Big(-\dfrac{1}{4}, 16\Big)$ ponto max.
(55.5) $(-1,-1)$ ponto min; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ponto max (55.6) $(0,0)$ sela; $(0,-3)$ e $(0,4)$max. locais
(55.7) $(1,2)$ ponto min. (55.8) $(0,1)$ e $(0,-3)$ selas; $(1,-1)$ min. loca

[56] 8 [57] $4cm$ por $4cm$ [58] $\dfrac{c}{2}$ de A, $\dfrac{c}{3}$ de B [59] $4a$

$$[60]\begin{cases} (60.1)\ (0,0),\ (0,4) & (60.2)\ \left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right) \\ (60.3)\ (0,0) & (60.4)\ \left(\dfrac{12}{13},-\dfrac{8}{13},0\right) \\ (60.5)\ (2,-2,2) & \end{cases}$$

[61] Triângulo eqüilatero   [62] $P(2,1),\ Q\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

[63] $T_{max}=\sqrt{14}$ em $\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$ e $T_{min}=-\sqrt{14}$ em $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{14}},-\dfrac{2}{\sqrt{14}},-\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

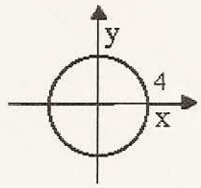
[66] $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$ [67] 4cm por 4cm por 2cm

2) a)

$D(f) = R^2$

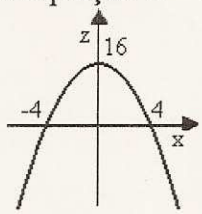
$G(f) \cap XoY$:

círculo de equação $x^2 + y^2 = 16$



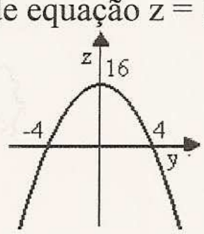
$G(f) \cap XoZ$:

Parábola de equação $z = 16 - x^2$



$G(f) \cap YoZ$:

Parábola de equação $z = 16 - y^2$



Curvas de nível

Para $z = k$,

$k < 16$: círculo de equação $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{16-k}\right)^2$

$k = 16$: ponto (0,0)

$k > 16$: $\varnothing$

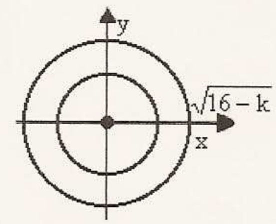
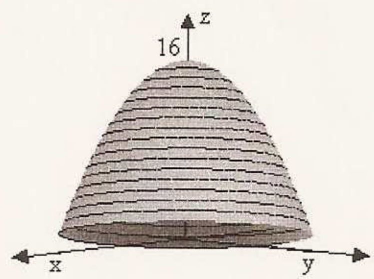


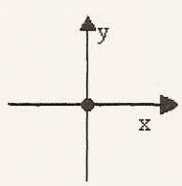
Gráfico: (um parabolóide de revolução)



2) b)

$D(f) = R^2$

$G(f) \cap XoY$: ponto (0,0)



$G(f) \cap XoZ$:

Parábola de equação $z = 9x^2$

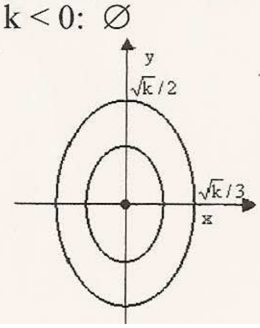
Curvas de nível

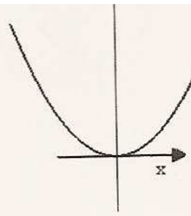
Para $z = k$,

$k > 0$: elípse de equação $\dfrac{x^2}{(\sqrt{k}/3)^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1$

$k = 0$: ponto (0,0)

$k < 0$: $\varnothing$





$G(f) \cap YoZ$:
Parábola de equação $z = 4y^2$

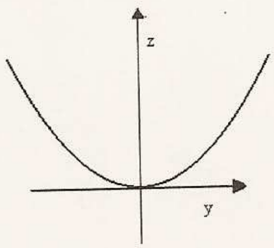
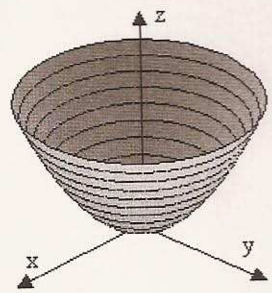
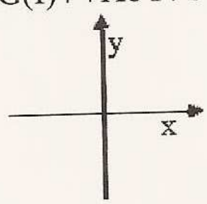


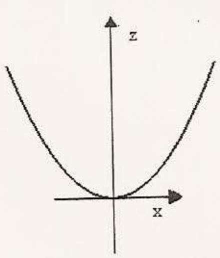
Gráfico:



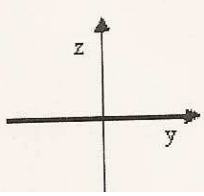
2) c)
$D(f) = R^2$
$G(f) \cap XoY$: o eixo OY



$G(f) \cap XoZ$:
Parábola de equação $z = x^2$



$G(f) \cap YoZ$: o eixo OY



Curvas de nível
Para $z = k$,
$k > 0$: as retas $x = \sqrt{k}$ e $x = -\sqrt{k}$
$k = 0$: o eixo OY
$k < 0$: $\varnothing$

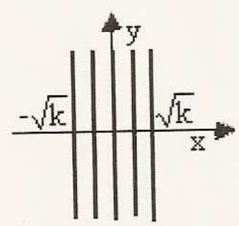
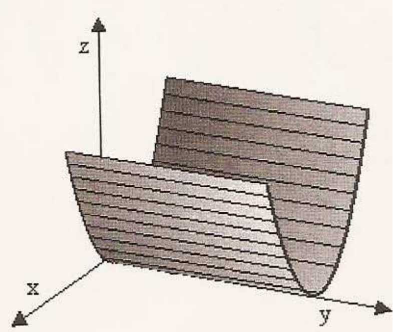


Gráfico: (uma superfície cilíndrica)

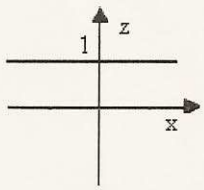


2) d)

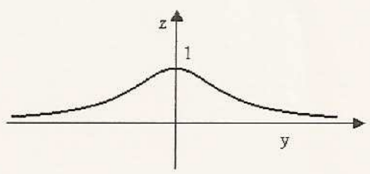
$D(f) = R^2$

$G(f) \cap XoY: \varnothing$

$G(f) \cap XoZ$: a reta $z = 1$



$G(f) \cap YoZ$: a curva $z = 1/(1+y^2)$



Curvas de nível

Para $z = k$,

$0 < k < 1$: as retas $y = \sqrt{1/k - 1}$ e $y = -\sqrt{1/k - 1}$

$k = 1$: o eixo OX

$k > 1$ ou $k \leq 0$: $\varnothing$

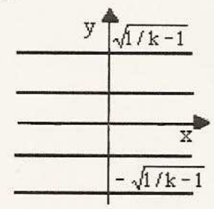
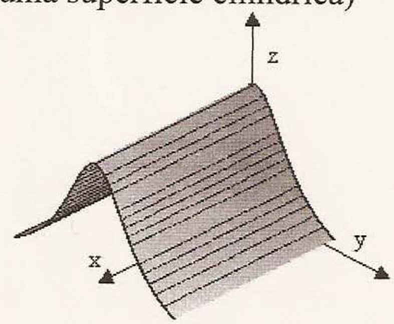


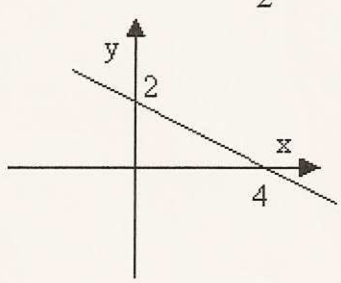
Gráfico: (uma superfície cilíndrica)



2) e)

$D(f) = R^2$

$G(f) \cap XoY$: a reta $y = -\dfrac{x}{2} + 2$

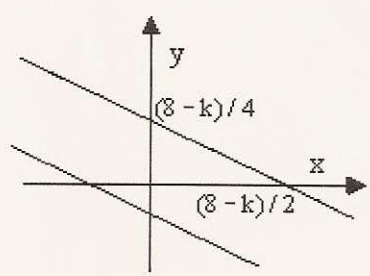


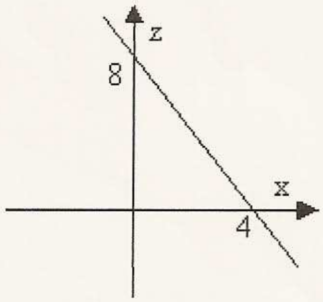
$G(f) \cap XoZ$: a reta $z = -2x + 8$

Curvas de nível

Para $z = k$,

$\forall\, k \in R$: a reta $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{8-k}{4}$





$G(f) \cap YoZ$: a reta $z = -4y + 8$

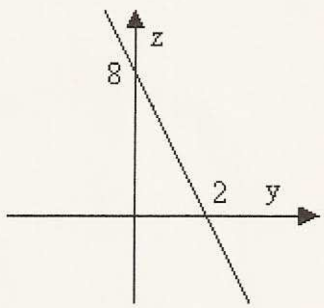
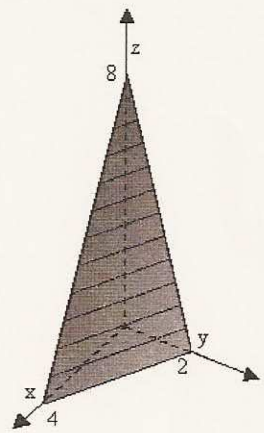
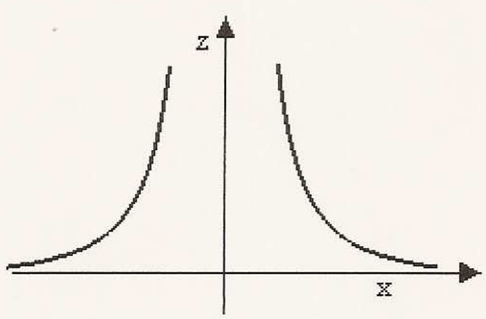


Gráfico: (um plano)



2) f)
$D(f) = R^2 - \{(0,0)\}$
$G(f) \cap XoY$: $\varnothing$

$G(f) \cap XoZ$: a curva $z = 4/x^2$



$G(f) \cap YoZ$: a curva $z = 1/y^2$

Curvas de nível
Para $z = k$,

$k > 0$: elípse de equação $\dfrac{x^2}{(2/\sqrt{k})^2} + \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{k})^2} = 1$

$k \leq 0$: $\varnothing$

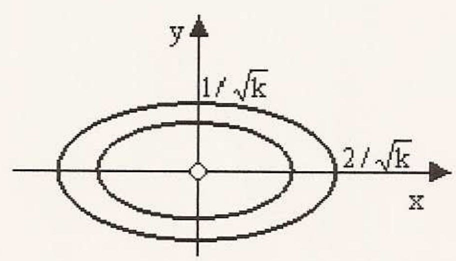
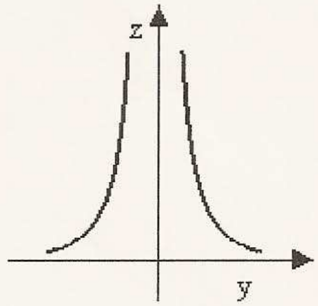
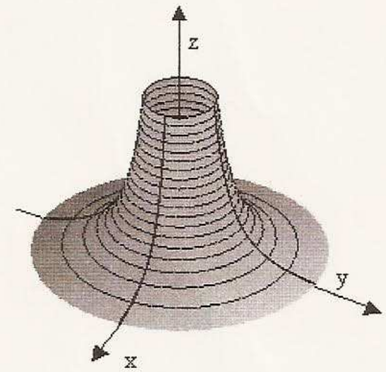


Gráfico:



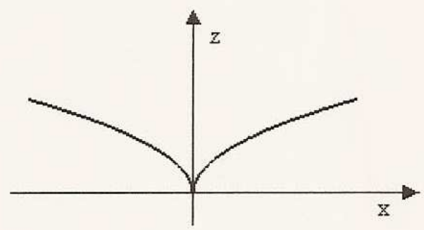


2) g) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$

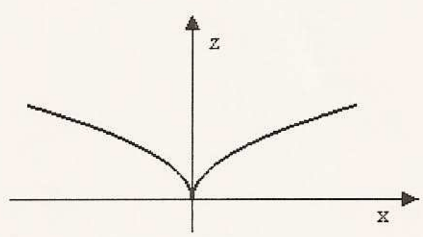
$D(f) = R^2$

$G(f) \cap XoY$: o ponto (0,0)

$G(f) \cap XoZ$: a curva $z = \sqrt{|x|}$



$G(f) \cap YoZ$: : a curva $z = \sqrt{|y|}$



Curvas de nível

Para z = k,

k > 0: circulo de equação $x^2 + y^2 = (k^2)^2$

k = 0: o ponto (0,0)

k < 0: $\varnothing$

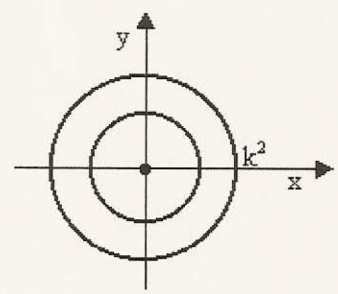


Gráfico: (uma superfície de revolução)