Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizada 2008.2

Coordenadas Polares

[1] Dados os pontos $P_1(3, \frac{5\pi}{3})$, $P_2(-3, 330°)$, $P_3(-1, -\frac{\pi}{3})$, $P_4(\sqrt{2}, -315°)$, $P_5(0, 53°)$, $P_6(0, e^{\pi})$ e $P_7(1, 3)$, determine:

(1.1) A representação gráfica de cada um desses pontos no plano polar.

(1.2) Três outros conjuntos de coordenadas polares para os pontos P_3 e P_4.

(1.3) Quais desses pontos coincidem com o ponto $P(3, 2310°)$.

(1.4) O conjunto principal de coordenadas polares do ponto P_2.

(1.5) Um conjunto de coordenadas polares (r, θ) do ponto P_3, tal que $r > 0$ e $\theta \in (-7\pi, -5\pi)$.

[2] Em cada um dos ítens a seguir, identifique o lugar geométrico do ponto que se move e faça um esboço desse lugar:

(2.1) Um ponto $P(r, \theta)$ se move de maneira que, para todos os valores de seu ângulo vetorial θ seu raio vetor r permanece constante e igual a 4.

(2.2) Um ponto se move de maneira que, para todos os valores de seu raio vetor, seu ângulo vetorial permanece constante e igual a 4.

[3] Determine um conjunto abrangente para cada uma das curvas dadas a seguir:

(3.1) $C_1 : \ r = 4$ (3.2) $C_2 : \ \theta = \frac{\pi}{2}$

(3.3) $C_3 : \ r = 2 \cos \theta$ (3.4) $C_4 : r = 2 \cos 4\theta$

[4] Verifique se o ponto P pertence à curva C, quando:

(4.1) $P(-1, \frac{\pi}{6})$ e $C : \ r^2 - 2 \cos 2\theta = 0$ (4.2) $P(-1, \frac{\pi}{2})$ e $C : \ r(1 - 3 \text{ sen } \theta) = 4$

(4.3) $P(4, \frac{\pi}{2})$ e $C : \ r = 4 \text{ sen } 3\theta$ (4.4) $P(0, \frac{\pi}{11})$ e $C : \ r - 3 \cos \theta + r \text{ sen } \theta = 0.$

[5] Determine o conjunto principal de coordenadas polares dos pontos de coordenadas retangulares:

(3.1) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (3.2) $(3, -2)$ (3.3) $(\cos 2, \ \text{sen } 2)$

[6] Transforme as equações cartesianas para polares:

(6.1) $2x - y = 0$ (6.2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ (6.3) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(6.4) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (6.5) $x^2 + y^2 + 3y = 0$ (6.6) $x^2 - y^2 = 16$

[7] Transforme as equações polares para cartesianas:

(7.1) $r = 8 \operatorname{sen} \theta$ (7.2) $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2$ (7.3) $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

(7.4) $r^2 = \theta$ (7.5) $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$ (7.6) $r^2 = 4 \cos 2\theta$

[8] Determine todos os pares de coordenadas polares do ponto Q simétrico de $P\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ em relação:

(8.1) ao eixo polar (8.2) ao eixo à 90° (8.3) ao pólo.

[9] Considere a curva $C : r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$.

(9.1) Determine uma equação polar da curva C' simétrica de C em relação:

(a) ao eixo polar (b) ao eixo à 90° (c) ao pólo.

(9.2) Verifique se C é simétrica em relação:

(a) ao eixo polar (b) ao eixo à 90° (c) ao pólo.

[10] Ache os pontos de intersecção dos gráficos do par de equações dadas:

(10.1) $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos \theta \end{cases}$ (10.2) $\begin{cases} r = 4(1 + \operatorname{sen} \theta) \\ r(1 - \operatorname{sen} \theta) = 3 \end{cases}$ (10.3) $\begin{cases} r = \operatorname{sen} 2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

(10.4) $\begin{cases} r = 1 - \operatorname{sen} \theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ (10.5) $\begin{cases} r = 2 + 2 \cos \theta \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ (10.6) $\begin{cases} r = 3 \\ r = 6 \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$

(10.7) $\begin{cases} r = 2 - 2 \cos \theta \\ r^2 = 16 \cos 2\theta \end{cases}$ (10.8) $\begin{cases} r = 4 - 2 \operatorname{sen} \theta \\ r = -2 + 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

[11] Deduzir a fórmula da distância entre os pontos $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ em coordenadas polares.

[12] Faça um esboço do gráfico das seguintes equações polares:

(12.1) $r = 3 - 4 \cos \theta$ (12.2) $r = 4 + 2 \operatorname{sen} \theta$ (12.3) $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

(12.4) $r^2 = -25 \cos 3\theta$ (12.5) $r = 4 \operatorname{sen} 5\theta$ (12.6) $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$

(12.7) $r = 3\theta,\ \theta > 0$ (12.8) $r = -8 \operatorname{sen} 2\theta$

Áreas de figuras planas em coordenadas polares

[13] Nos problemas a seguir encontre a área das regiões indicadas:

(13.1) Interior à circunferência $r = \cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

(13.2) Exterior à circunferência $r = \cos\theta$ e interior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

(13.3) Intersecção do círculo $r = \cos\theta$ com o interior da cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

(13.4) Intersecção dos círculos $r = 4\cos\theta$ e $r = 2$.

(13.5) Interior à rosácea $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$.

(13.6) Interior à rosácea $r = 2\cos 3\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(13.7) Interior à circunferência $r = 1$ e exterior à rosácea $r = 2\cos 3\theta$.

(13.8) Entre a 3ª e 4ª voltas da espiral $r = a,\ a > 0$ e $\theta \geq 0$.

(13.9) Interior à lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

(13.10) Interior à rosácea $r = \text{sen}\,2\theta$ e exterior à circunferência circunferência $r = \cos\theta$.

(13.11) Exterior à limaçon $r = 2 - \text{sen}\,\theta$ e interior à circunferência $r = 3\,\text{sen}\,\theta$.

(13.12) Intersecção do círculo $r = 1$ como interior da lemniscata $r^2 = a^2\,\text{sen}\,2\theta$.

Comprimento de arco em coordenadas polares

[14] Calcular o comprimento de arco das seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

(14.1) a espiral $r = \theta^2,\ 0 \leq \theta \leq \sqrt{3}$

(14.2) a espiral $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$

(14.3) a cardioide $r = 1 + \cos\theta$

(14.4) $r = -1 + \text{sen}\,\theta$

(14.5) $r = (\cos\theta + \text{sen}\,\theta),\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(14.6) $r = \sqrt{1 + \text{sen}\,2\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$

[15] Determine o comprimento da espiral logarítmica $r = e^{\theta/2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2$.

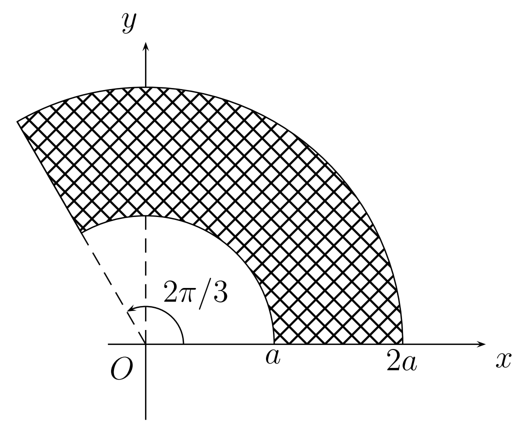
[16] Calcule o comprimento de arco da curva $r = \cos^2(\theta/2)$.

Centróides de Regiões Planas em coordenadas polares e Teorema do Pappus-Guldin

[17] O diagrama ao lado mostra uma lamina rígida uniforme em forma de uma seção de um anel circular que está no plano xy. A seção é de ângulo $\dfrac{2\pi}{3}$ e raio r onde $a \leq r \leq 2a$ como mostrado.

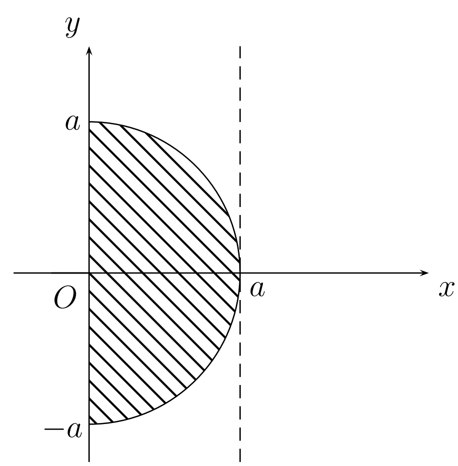
Mostre que as coordenadas do centróide G deste lamina são $\left(\dfrac{7\sqrt{3}a}{6\pi}, \dfrac{7a}{2\pi}\right)$.

Agora, a lamina é girada por 360° em torno do eixo x. Utilizando o Teorema de Pappus-Guldin, encontre o volume deste sólido de revolução.



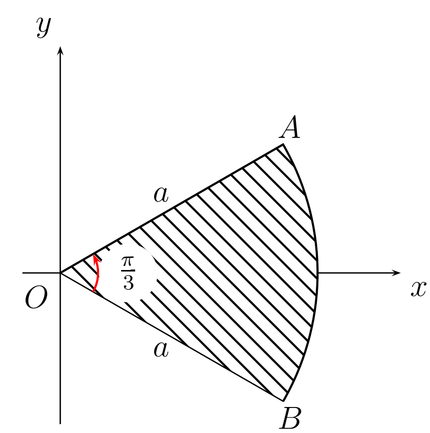
[18] O diagrama ao lado mostra uma lamina semicircular rígido uniforme de raio a e massa M no plano xy. Usando coordenadas polares, calcule as coordenadas do centróide G desta lamina.

Agora, a lamina é girada por um ângulo de 360° em torno da reta $x = a$. Mostre pelo Teorema de Pappus-Guldin, que o volume do sólido de revolução gerado é $\dfrac{(3\pi - 4)\pi a^3}{3}$.



[19] O diagrama ao lado mostra uma lamina rígida uniforme AOB de massa M no plano xy. A lamina é um setor de um disco de raio a, cujo centro é a origem O, com ângulo $A\widehat{O}B$ igual $\dfrac{\pi}{3}$. Usando coordenadas polares, calcule as coordenadas do centróide G desta lamina.

Agora, a lamina é girada por um ângulo de 360° em torno do eixo y. Mostre pelo Teorema de Pappus-Guldin, que o volume do sólido de revolução gerado é $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.



Respostas

[1] $\begin{cases} (1.2) \begin{cases} P_3(1,120°), & P_3(1,480°), & P_3(-1,300°) \\ P_4(\sqrt{2},45°), & P_4(-\sqrt{2},-135°), & P_4(-\sqrt{2},225°) \end{cases} \\ (1.3)\ P_2 \qquad (1.4)\ P_2(3,150°) \qquad (1.5)\ P_2(1,-\frac{16\pi}{3}) \end{cases}$

[2] $\{$ (2.1) Círculo: $r = 4$ (2.2) Reta: $\theta = 45°$

[3] $\begin{cases} (3.1)\ E(C) = \{r = 4,\ r = -4\} & (3.2)\ E(C) = \{\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\} \\ (3.3)\ E(C) = \{r = 2\cos\theta\} & (3.4)\ E(C) = \{r = 2\cos 4\theta;\ r = -2\cos 4\theta\} \end{cases}$

[4] $\{$ (4.1) Sim (4.2) Sim (4.3) Não (4.4) Sim

[5] $\{$ (5.1) $(3, \frac{5\pi}{3})$ (5.2) $(\sqrt{13}, 2\pi + \operatorname{arctg}(-\frac{2}{3}))$ (5.3) $(1,2)$

[6] $\begin{cases} (6.1)\ \theta = \operatorname{arctg} 2 \\ (6.2)\ r^2 - 2r(\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta) + 6 = 0 \\ (6.3)\ r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 0 \\ (6.4)\ r = 0 \text{ ou } r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) - \frac{3a}{2}\operatorname{sen} 2\theta = 0 \qquad (6.5)\ r + 3\operatorname{sen}\theta = 0 \\ (6.6)\ r^2 = 16\sec\theta \end{cases}$

[7] $\begin{cases} (7.1)\ x^2 + y^2 - 8y = 0 & (7.2)\ xy = 1 \\ (7.3)\ 2\sqrt{x^2+y^2} - 6x - 3y = 0 & (7.4)\ y - x\operatorname{tg}(x^2+y^2) = 0 \\ (7.5)\ (x^2+y^2)^2 - 6x^2y + 2y^3 = 0 & (7.6)\ (x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2) \end{cases}$

[8] $\begin{cases} (8.1) \left((-1)^n\,2,\ -\dfrac{\pi}{3} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z} \qquad (8.2) \left((-1)^n\,2,\ -\dfrac{\pi}{3} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z} \\ (8.3) \left((-1)^n\,2,\ \dfrac{\pi}{3} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

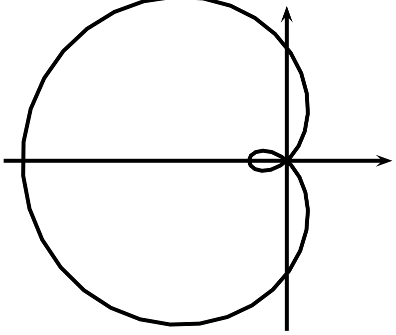
[9] $\begin{cases} (9.1) \{\ (a)\ r^2 = -2\operatorname{sen} 2\theta \qquad (b)\ r^2 = -2\operatorname{sen} 2\theta \qquad (c)\ r^2 = 2\operatorname{sen} 2\theta \\ (9.2) \{\ (a) \text{ Nâo} \qquad (b) \text{ Não} \qquad (c) \text{ Sim} \end{cases}$

$$
[10]\begin{cases}
(10.1)\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\pi}{3}\right) \text{ e } \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5\pi}{3}\right) \\[2ex]
(10.2)\ \left(6,\ \dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(6,\ \dfrac{5\pi}{6}\right),\ \left(2,\ \dfrac{7\pi}{6}\right) \text{ e } \left(2,\ \dfrac{11\pi}{6}\right) \\[2ex]
(10.3)\begin{cases}
(0,0),\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\pi}{8}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\pi}{8}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5\pi}{8}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{7\pi}{8}\right) \\[2ex]
\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{9\pi}{8}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{11\pi}{8}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{13\pi}{8}\right) \text{ e } \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{15\pi}{8}\right)
\end{cases} \\[2ex]
(10.4)\begin{cases}
(0,0),\ \left(1,\ 0\right),\ \left(1,\ \pi\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5\pi}{6}\right) \\[2ex]
\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4},\ \ \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\right) \text{ e } \left(\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4},\ -\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\right)
\end{cases} \\[2ex]
(10.5)\ (0,0),\ \left(2+\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right) \text{ e } \left(2-\sqrt{2},\ \dfrac{5\pi}{4}\right) \\[2ex]
(10.6)\begin{cases}
\left(3,\ \dfrac{\pi}{12}\right),\ \left(3,\ \dfrac{5\pi}{12}\right),\ \left(3,\ \dfrac{13\pi}{12}\right),\ \left(3,\ \dfrac{17\pi}{12}\right) \\[2ex]
\left(-3,\ \dfrac{7\pi}{12}\right),\ \left(-3,\ \dfrac{19\pi}{12}\right),\ \left(-3,\ \dfrac{11\pi}{12}\right) \text{ e } \left(-3,\ \dfrac{23\pi}{12}\right)
\end{cases} \\[2ex]
(10.7)\ (0,0),\ (4,\pi),\ \left(\dfrac{4}{7},\ \ \arccos\left(\dfrac{5}{7}\right)\right) \text{ e } \left(\dfrac{4}{7},\ -\arccos\left(\dfrac{5}{7}\right)\right) \\[2ex]
(10.8)\ (-3,\dfrac{11\pi}{6}),\ (-3,\dfrac{7\pi}{6})
\end{cases}
$$

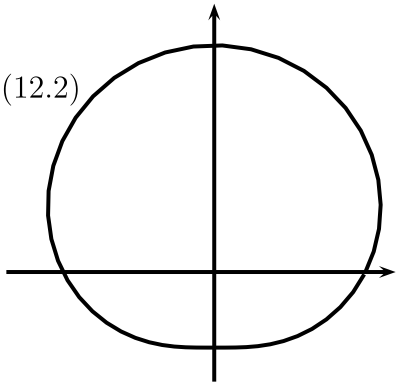
[11] $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left(\theta_2 - \theta_1\right)$

[12]

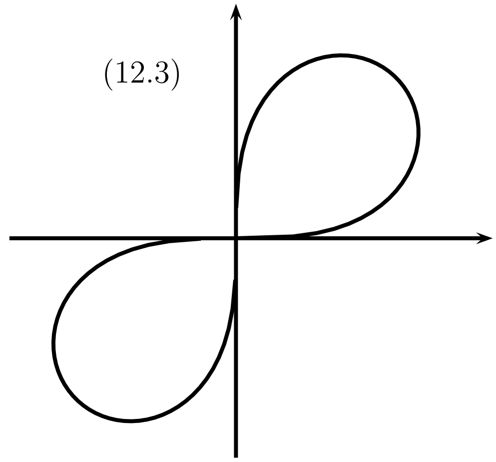
(12.1)



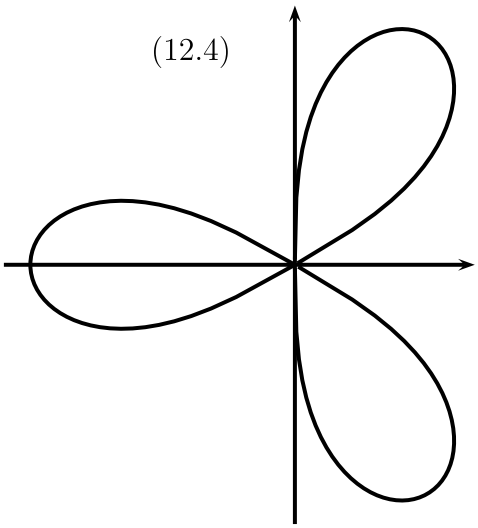
(12.2)



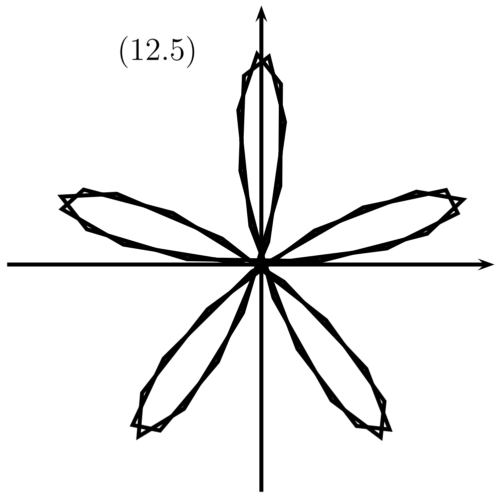
(12.3)



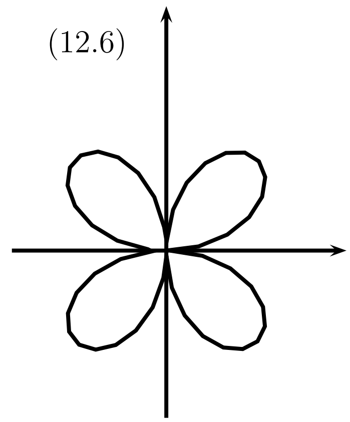
(12.4)



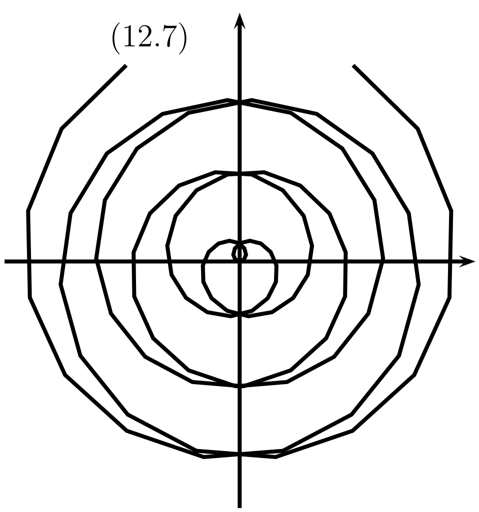
(12.5)



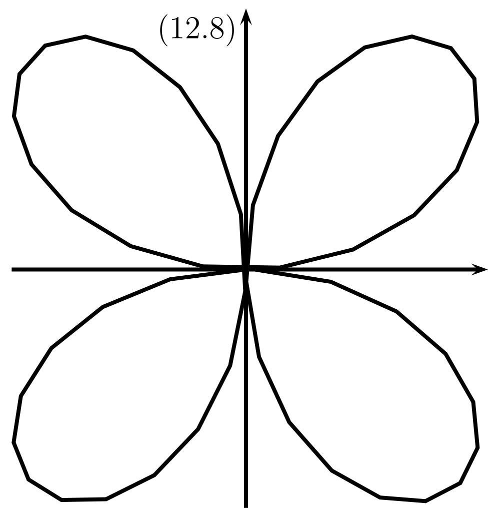
(12.6)



(12.7)



(12.8)



[13] (13.1) $\frac{12\sqrt{3}-4\pi}{12}$ (13.2) $\frac{11\pi+12\sqrt{3}}{12}$ (13.3) $\frac{7\pi-12\sqrt{3}}{12}$ (13.4) $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{3}$
(13.5) 2π (13.6) $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$ (13.7) $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$ (13.8) $24a^2\pi^3$
(13.9) a^2 (13.10) $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$ (13.11) $3\sqrt{3}$ (13.12) $\frac{6-3\sqrt{3}+\pi}{3}$

[14] (14.1) $\frac{21\sqrt{7}}{9}-\frac{8}{3}$ (14.2) $e^{\pi}-1$ (14.3) 8
(14.4) 8 (14.5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (14.6) $\pi\sqrt{2}$

[15] $\sqrt{5}(e-1)$ [16] 4

[17] $V = 7a^3\pi$ u.c [18] $\left(\frac{4a}{3\pi}, 0\right)$ [19] $\left(\frac{2a}{\pi}, 0\right)$