UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizada 2008.2

Áreas de figuras planas em coordenadas cartesianas

[1] Determine a área da região do plano limitada simultaneamente pelas seguintes curvas:

(1.1) $y = \ln x,\ x = 2$ e o eixo Ox

(1.2) $x = 8 + 2y - y^2,\ y = 1,\ y = 3$ e $x = 0$

(1.3) $xy = 4$ e $x + y = 5$

(1.4) $y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 0$ e $x = 2$

(1.5) $y = 2x,\ y = 1$ e $y = \dfrac{2}{x}$

(1.6) $y = |x^2 - 4|$ e $y = 2$

(1.7) $y = x^3 - 3x$ e $y = 2x^2$

(1.8) $y = \dfrac{9}{x},\ y = 9x$ e $y = x$

(1.9) $f(x) = x|x|$ e $g(x) = x^3$

(1.10) $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$

Volumes por seções planas paralelas

[2] Utilizando seções planas paralelas, mostre que o volume de uma pirâmide quadrangular reta, com altura h e base quadrada de lado a, é igual a $\dfrac{a^2h}{3}$.

[3] Utilizando integral de seções planas paralelas, mostre que o volume do cone circular reto, de altura h e raio da base r, é igual a $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

[4] Calcule o volume do sólido que tem para base um círculo cujo raio mede 3 u. c. e cujas seções transversais a um diâmetro desta são quadrados, todos contidos em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos lados cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[5] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus catetos cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[6] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas situadas em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e a medida do eixo maior igual ao dobro da medida do eixo menor. (Considere a área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b, respectivamente, igual a πab).

[7] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixos medindo 2 cm e 3 cm e cujas seções transversais ao eixo maior são triângulos eqüiláteros, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem. (Observação: A área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b, respectivamente, igual a πab).

[8] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor a e b, respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo maior são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo maior. (Observe que esse volume é menor do que o volume do item anterior).

[9] Calcule uma expressão, em integrais, que represente o volume do sólido que tem para base a região do plano limitada pela parábola $P : x = y^2 - 1$ e a reta $r : x = y + 1$ e cujas seções transversais ao eixo Oy são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tais que as hipotenusas têm extremidades no contorno da base desse sólido e são perpendiculares ao eixo Oy.

Volumes de sólidos de revolução

[10] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, com $x \in [-1, 1]$, em torno do eixo Ox.

[11] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da elipse $E : 9x^2 + y^2 = 9$ em torno do:

(11.1) Eixo maior (11.2) Eixo menor.

[12] Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região compreendida entre o(s) gráfico(s) de:

(12.1) $y = (x-1)(x-3)^2$ e o eixo x, ao redor do eixo y

(12.2) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$ e o eixo x, ao redor do eixo x

(12.3) $y = 2\sqrt{x-1}$ e $y = x - 1$, ao redor da reta $x = 6$

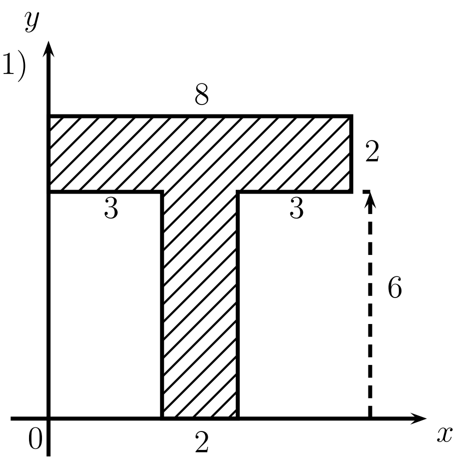
(12.4) $x = (y-2)^2$ e $y = x$, ao redor da reta $y = 1$

(12.5) $y =$ sen x, para $0 \leq x \leq \pi$, ao redor do eixo x

Centróides de Regiões Planas em coordenadas cartesianas e o Segundo Teorema do Pappos-Guldin

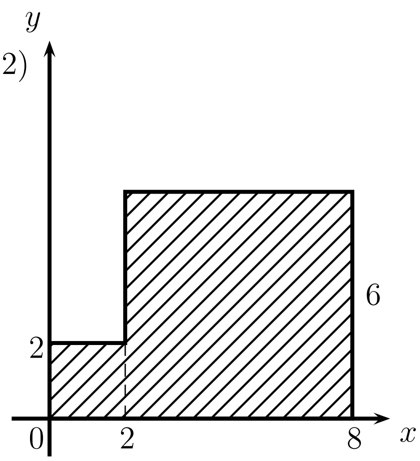
[13] Determine a posição do centróide das seguintes figuras e o volume do sólidos gerados pela rotação das mesmas em torno da reta indicada abaixo de cada figura:

(13.1)



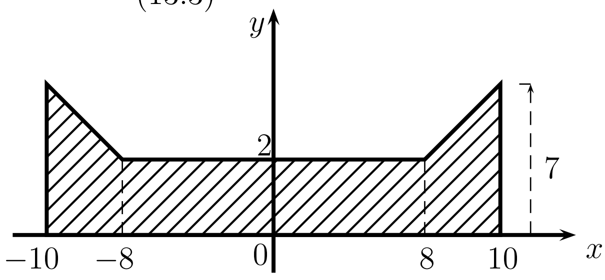
reta: $y = 10$

(13.2)



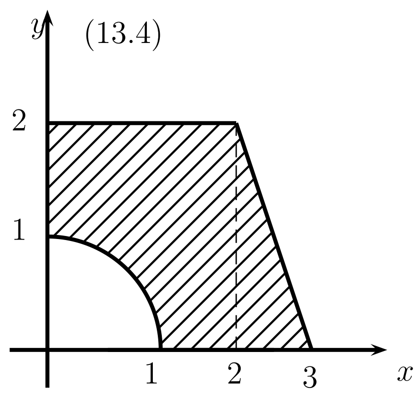
reta: $x - y + 4 = 0$

(13.3)



reta: $y - 7 = 0$

(13.4)



reta: $x - 4 = 0$

[14] Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada:

(14.1) Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$

(14.2) Área delimitada pela curva $y=4-\dfrac{x^2}{4}$ e o eixo x

(14.3) Área delimitada pela parábola $y^2=ax$ e pela reta $x=a$.

[15] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+2$.

(15.1) Esboce R e calcule a sua área.

(15.2) Calcule o centróide de R.

(15.3) A região R é girado em torno da reta $x=2$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappus-Guldin.

[16] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y=-x^2-3x+6$ e $x+y-3=0$.

(16.1) Esboce R e calcule a sua área.

(16.2) Calcule o centróide de R.

(16.3) A região R é girado em torno da reta $x+y-3=0$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappus-Guldin.

Comprimento de arco em coordenadas cartesianas

[17] Determinar o comprimento das curvas dadas em coordenadas retangulares:

(17.1) $y=\ln\,(1-x^2)$ de $x=\dfrac{1}{4}$ a $x=\dfrac{3}{4}$.

(17.2) $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{8x^2}$ de $x=1$ a $x=2$.

(17.3) $y=1-\ln\,(\operatorname{sen} x)$ de $x=\dfrac{\pi}{6}$ a $x=\dfrac{\pi}{4}$.

(17.4) $(y-1)^2=(x+1)^3$ de $x=0$ a $x=1$.

(17.5) $y=\dfrac{1}{2}\Big(e^x+e^{-x}\Big)$ de $x=0$ a $x=1$.

(17.6) $x=\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{4y}$ de $y=1$ a $y=3$.

Curvas na forma paramétricas

[18] Esboçar os gráficos das seguintes curvas paramétricas. Eliminando t nas equações, achar as equações na forma cartesiana:

(18.1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (18.2) $\begin{cases} x = t^5 - 4t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

(18.3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ (18.4) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$, $t \geq 0$.

Derivadas de Funções dadas na forma paramétrica

[19] Calcule as expressões das derivadas e os seus respectivos valores nos pontos dados:

(19.1) $\begin{cases} x = \text{ sen } \ t \\ y = \text{ sen } \ 2t \end{cases}$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto $t = \dfrac{\pi}{6}$

(19.2) $\begin{cases} x = 6t(1+t^2)^{-1} \\ y = 6t^2(1+t^2)^{-1} \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto de abscissa $\dfrac{12}{5}$

(19.3) $\begin{cases} x = t + \text{ sen } (\frac{\pi}{2}t) \\ y = t + \ln t \end{cases}$, $t > 0$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto $t = 8$

[20] Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nos seguintes casos:

(20.1) $\begin{cases} x = \text{ sen } t \\ y = \text{ sen } 2t \end{cases}$ $, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (20.2) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

[21] Verifique se:

(21.1) $\begin{cases} x = \text{ sec } (t) \\ y = \ln \text{ (cos } t) \end{cases}$ $, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, satisfaz a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} + e^y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

(21.2) $\begin{cases} x = \text{ arcsen}(t) \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ $, t \in [-1, 1]$, satisfaz a equação $\text{sen } x \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} + y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

[22] Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da curva C, no ponto de abscissa

$x_0 = -\dfrac{1}{4}$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\,\text{sen}^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

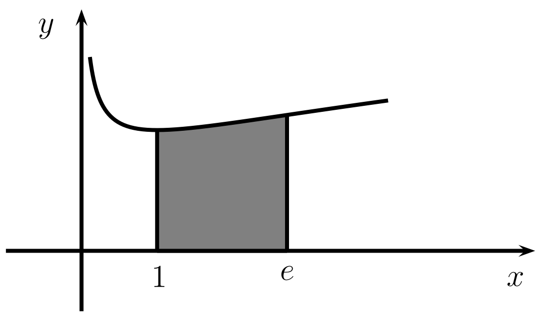
[23] Determine as equações das retas tangentes e normal ao gráfico da curva C, no ponto com $t = 1$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2\,\text{arctg}(t) \end{cases}.$$

Áreas de regiões planas dadas por funções na forma paramétrica

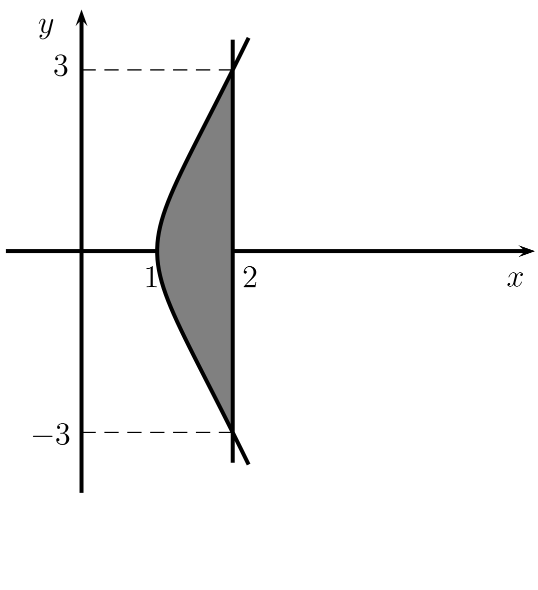
[24] Determine a área limitada:

(24.1) pelo eixo Ox, $x = 1$, $x = e$ e a curva de equações paramétricas $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$

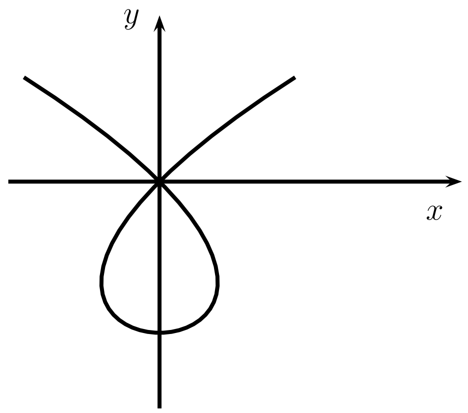


(24.2) pelas curvas de equações $x = 2$ e

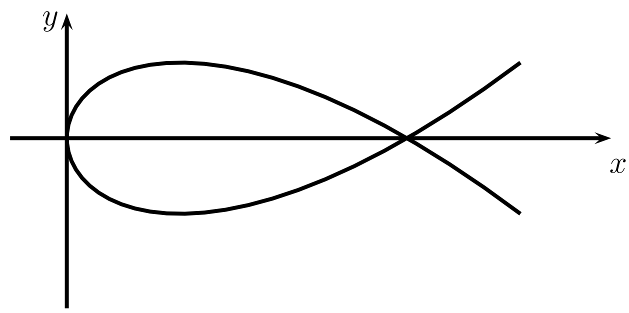
$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$$



(24.3) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$



(24.4) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$



[25] Seja R a região do plano acima da reta $y = 2$ e abaixo do arco da ciclóide de equações

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi].$$

Esboce R e calcule a sua área.

Comprimento do arco de uma função na forma paramétrica

[26] Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo:

(26.1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(26.2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$

(26.3) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, \; a > 0$

(26.4) $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

(26.5) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(26.6) $\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

[27] As equações $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ dão a posição (x, y) de uma partícula no instante t. Determine a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$.

[28] Determine o comprimento de arco do laço de curva do exercício (8.4).

Volumes de sólidos de revolução

[29] Dê a expressão da integral que permite calcular o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada pelo arco de ciclóide $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e o eixo Ox gira em torno de:

(29.1) $y = -1$ (29.2) $x = \pi$ (29.3) $y = 0$.

Respostas

[1]
- (1.1) $[2\ln 2 - 1]$u.a (1.2) $\dfrac{46}{3}$u.a (1.3) $\left[\dfrac{15}{2} - 8\ln 2\right]$u.a
- (1.4) $\left[\frac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}\right]$u.a (1.5) $\left[\dfrac{-3}{4} + 2\ln 2\right]$u.a (1.6) $\left[\dfrac{16\sqrt{2} + 24\sqrt{6} - 64}{3}\right]$u.a
- (1.7) $\frac{71}{6}$u.a (1.8) $18\ln 3$ u.a (1.9) $\dfrac{1}{6}$u.a
- (1.10) $\dfrac{64}{3}$u.a

[4] $V = 144$ u.v [5] $V = \dfrac{8r^3}{3}$ [6] $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ [7] $V = 16\sqrt{3}$ cm^3 [8] $V = \dfrac{2\pi ab^2}{3}$

[9] $V = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{(2+y-y^2)^2}{4}\, dy = \frac{81}{40}$ u.v [10] $V = \dfrac{\pi(e^4 + 4e^2 - 1)}{4e^2}$ u.v

[11] (11.1) $V = 4\pi$ u.v (11.2) $V = 12\pi$ u.v

[12]
- (12.1) $V = \dfrac{24\pi}{5}$ u.v (12.2) $V = \dfrac{96\pi}{5}$ u.v (12.3) $V = \dfrac{272\pi}{15}$ u.v
- (12.4) $V = \dfrac{27\pi}{2}$ u.v (12.5) $V = \dfrac{\pi^2}{2}$ u.v

[13]
- (13.1) $\left(4,\ \dfrac{37}{7}\right)$; $V = 264\pi u.v$ (13.2) $\left(\dfrac{23}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$; $V = 232\sqrt{2}\pi u.v$
- (13.3) $\left(0,\ \dfrac{23}{15}\right)$; $V = 80\pi u.v$ (13.4) $\left(\dfrac{44}{28-\pi},\ \dfrac{76}{84-3\pi}\right)$; $V = 2\pi(17-\pi)u.v$

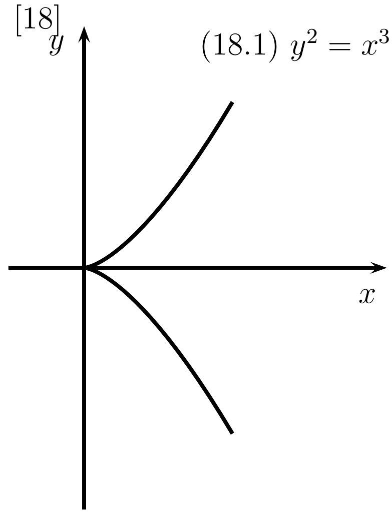
[14] (14.1) $\left(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$ (14.2) $\left(0, \dfrac{8}{5}\right)$ (14.3) $\left(\dfrac{3a}{5}, 0\right)$

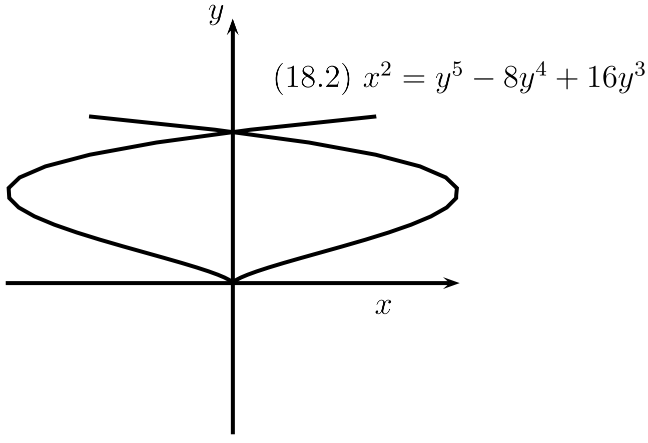
[15] (15.1) $A = \dfrac{8}{3}$ u.a (15.2) $(\bar{x},\ \bar{y}) = (0,\ 1)$ (15.3) $V = \dfrac{32\pi}{3}$ u.v

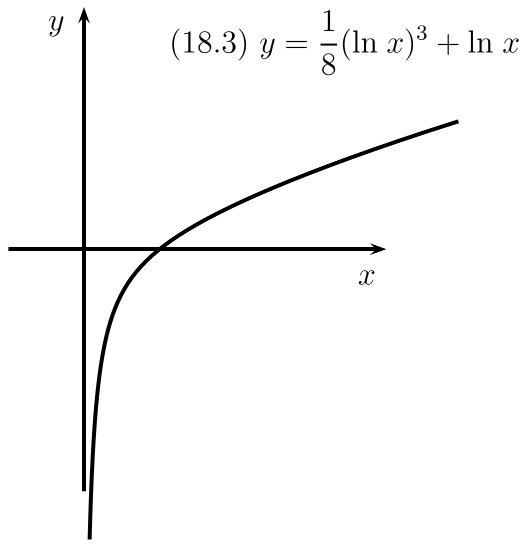
[16] (16.1) $A = \dfrac{32}{3}$ u.a (16.2) $(\bar{x},\ \bar{y}) = \left(-1,\ \dfrac{25}{8}\right)$ (16.3) $V = \dfrac{256\sqrt{2}\pi}{15}$ u.v

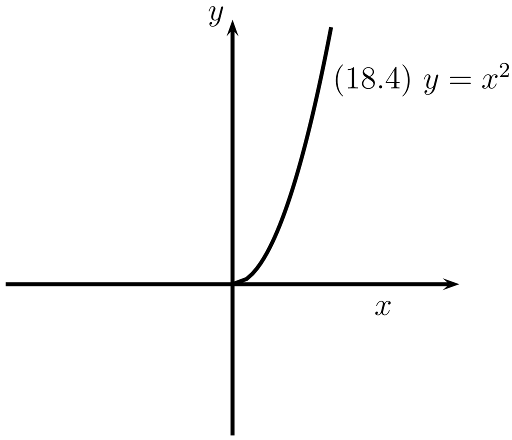
[17]
- (17.1) $\ln\left(\dfrac{21}{5}\right) - \dfrac{1}{2}$ u.c (17.2) $\dfrac{123}{32}$ u.c (17.3) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right|$ u.c
- (17.4) $\dfrac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13})$ u.c (17.5) $\dfrac{1}{2e}(e^2 - 1)$ u.c (17.6) $\dfrac{53}{6}$ u.c

[18]









[19] $\begin{cases} (19.1)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2cos(2t)}{cos(t)}, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ (19.2)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1-t^2};\ \text{para } x = \dfrac{12}{5},\ \text{temos } t = \dfrac{1}{2},\ \text{logo } \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} \\ (19.3)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+t}{t} \cdot \dfrac{1}{1+(\pi/2)cos(\frac{\pi}{2}t)}, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=8} = \dfrac{9}{8+4\pi} \end{cases}$

[20] $\begin{cases} (20.1)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\cos(2t).\operatorname{sen}(t) - 4.\operatorname{sen}(2t).\cos(t)}{\cos^3(t)} \quad (20.2)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12e^{5t} \end{cases}$

[22] $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

[23] $\begin{cases} \text{Reta Tangente: } y - (1 + \frac{\pi}{2}) = 2(x-1) \\ \text{Reta Normal: } y - (1 + \frac{\pi}{2}) = -1\dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$

[24] $\begin{cases} (24.1)\ \dfrac{9e-10}{4} \text{ u.a} \quad (24.2)\ \dfrac{52}{15} \text{ u.a} \quad (24.3)\ \dfrac{8}{15} \text{ u.a} \quad (24.4)\ \dfrac{8\sqrt{3}}{5} \text{ u.a} \end{cases}$

[25] $(2\pi + 8)$ u.a

[26] $\begin{cases} (26.1)\ 4\pi \text{ u.c} \quad (26.2)\ \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left|\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right| \text{ u.c} \quad (26.3)\ 6a \text{ u.c} \\ (26.4)\ \dfrac{1}{2} \text{ u.c} \quad (26.5)\ 8a \text{ u.c} \quad (26.6)\ \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1) \text{ u.c} \end{cases}$

[27] $10\sqrt{26} + 2\ln(5 + \sqrt{26})$ u.c [28] $4\sqrt{3}$ u.c

$$[29]\begin{cases} (29.1)\ V = \pi \displaystyle\int_0^{2\pi} \Big[(2-\ \cos t)^2 - 1\Big]\Big[1-\ \cos t\Big]\ dt \\ \\ (29.2)\ V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \Big[\pi - (t-\ \operatorname{sen} t)^2\Big]\ \operatorname{sen} t\ dt \\ \\ (29.3)\ V = \pi \displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - cost)^3\ dt \end{cases}$$