Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática

DISCIPLINA: CÁLCULO B

UNIDADE III - LISTA DE EXERCÍCIOS - 2007.2

Integração Dupla

[1] Esboce a região de integração e inverta a ordem nas seguintes integrais:

(1.1) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\, dxdy$ (1.2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\, dydx$ (1.3) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dydx$

[2] Esboce a região de integração, inverta a ordem e calcule as seguintes integrais:

(2.1) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} \frac{\text{sen}\,(\pi x)}{1-x}\, dxdy$ (2.2) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 y e^{x^3}\, dxdy$ (2.3) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\, dxdy$

[3] Calcule $\displaystyle\int\int_R f(x,y)\, dA,$ onde:

(3.1) $f(x,y) = xe^{xy}$; R é a região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$

(3.2) $f(x,y) = x\cos(xy)$; R é a região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi/2\}$

(3.3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$; R é a região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$

[4] Calcule as seguintes integrais, sabendo que R é a região delimitada pelas curvas dadas:

(4.1) $\displaystyle\int\int_R (8-x-y)\, dxdy,$ $R : \{y = x^2 \text{ e } y = 4.$

(4.2) $\displaystyle\int\int_R (x+y)\, dxdy,$ $R : \{y = x^2+1,\; y = -x^2-1,\; x = -1 \text{ e } x = 1.$

(4.3) $\displaystyle\int\int_R \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy,$ $R : \{y = x,\; y = 2x,\; x = 1 \text{ e } x = 2.$

[5] Transforme as seguintes integrais para coordenadas polares e calcule-las:

(5.1) $\displaystyle\int\int_R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy,$ $R : \{1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

(5.2) $\displaystyle\int\int_R xy\, dxdy,$ $R : \{x \geq 0,\; y \geq 0,\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

(5.3) $\displaystyle\int\int_R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy,$ $R : \{(x-a)^2+y^2 \leq a^2.$

(5.4) $\displaystyle\int\int_R (1-x^2-y^2)\, dxdy,$ $R : \{x \geq 0,\; y \geq 0,\; x = 0,\; y = x,\; x^2+y^2 = 1.$

[6] Calcule, usando **integral dupla**, a área da região R delimitada pelas curvas abaixo. Esboce os gráficos:

(6.1) $y = x^3,\ y = -x + 2$ e $y = 0$

(6.2) $y = e^{x-1},\ y = x$ e $x = 0$

(6.3) $x = y^2 + 1$ e $x = -y + 3$

(6.4) $x = y^2,\ y = x + 3,\ y = -2$ e $y = 3$

[7] Determine, usando **integral dupla**, a área da região no primeiro quadrante delimitada pela curva polar $r = 2 + \cos\theta$ e as curvas cartesianas $y = x$ e $y = 0$.

[8] Determine, usando **integral dupla**, o centróide da região no primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = x^2,\ y = 0$ e $x = 2$, assumindo que a densidade por unidade área da região é constante.

[9] Calcule, usando **integral dupla**, o volume:

(9.1) do tetraedro limitado no 1º octante pelo plano $\dfrac{z}{3} + \dfrac{x}{2} + y = 1$.

(9.2) do sólido limitado pela superfície $f(x, y) = 4 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16}$, os planos $x = 3$ e $y = 2$ e os três planos coordenadas.

(9.3) do sólido do 1º octante delimitado pelos planos coordenadas, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 - 1$ e pelo plano $2x + y = 2$.

Campos Vetoriais

[10] Descreva geometricamente os seguintes campos de vetores definidos em $\mathbb{R}^2$:

(10.1) $\overrightarrow{F}(x, y) = x^2\,\overrightarrow{j}$

(10.2) $\overrightarrow{F}(x, y) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

(10.3) $\overrightarrow{F}(x, y) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$

[11] Calcule a divergência dos seguintes campos vetoriais:

(11.1) $\overrightarrow{F}(x, y) = (xy^2, e^{x^2+y^2})$

(11.2) $\overrightarrow{F}(x, y) = (\cos(x + y),\ \mathrm{sen}\,(\pi xy))$

(11.3) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y, x, z)$

(11.4) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xy, xz, z^2)$

(11.5) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (e^{x^2yz}, e^{xy^2z}, e^{xyz^2})$

(11.6) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x + \cos(y), z\,\mathrm{sen}\,(x), x^2yz)$

[12] Calcule o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

(12.1) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3z^2, 3x^2, 3y^2)$

(12.2) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (sin(x), z\cos(y), 3z)$

(12.3) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\cos(2xy), 3x + 2z + y, yz^2)$

(12.4) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$

[13] Verifique se os seguintes campos vetoriais são conservativos e, em caso afirmativo, calcule o potencial:

(13.1) $\overrightarrow{F}(x, y) = (2x \text{ sen } y + 4e^x,\ \cos x)$

(13.2) $\overrightarrow{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$

(13.3) $\overrightarrow{F}(x, y) = (3x^2 + 2y^2, 4xy + 6y^2)$

(13.4) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

(13.5) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy} + \cos z)$

[14] Se o potencial entre dois cilindros concêntricos é $V(x, y) = 110 + 30\ln(x^2 + y^2)$, em volts, qual é a direção da força elétrica no ponto $P = (2, 5)$? Mostre que $\nabla^2 V = 0$.

Integrais Curvilíneas

[15] Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

(15.1) $\int_C (y/x)\, ds, \qquad C: x = t^4,\ y = t^3,\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1$

(15.2) $\int_C (2\cos x + 3y + \ln z)\, ds, \qquad C: x = t,\ y = 2t,\ z = t,\ e \leq t \leq e^2$

(15.3) $\int_C (xy^4)\, ds$, $\quad C$ é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$

(15.4) $\int_C (x^2 z)\, ds$, $\quad C$ é o segmento de reta de $(0, 6, -1)$ a $(4, 1, 5)$

(15.5) $\int_C xy\, dx + (x - y)\, dy$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$

(15.6) $\int_C y(x^2 + y^2)\, dx - x(x^2 + y^2)\, dy + xy\, dz, \quad C: x = \cos t,\ y = \text{ sen } t,\ z = t,\ -\pi \leq t \leq \pi$

(15.7) $\int_C x^2\, dx + y^2\, dy + z^2\, dz$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$ e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$

[16] Mostre que a integral $\int_C (2x \text{ sen } y)\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$, onde C é qualquer caminho de $(-1, 0)$ a $(3, 2)$, não depende do caminho escolhido. Calcule esta integral.

[17] Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\gamma$ em cada um dos seguintes casos:

(17.1) $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2\overrightarrow{i} + (x-y)\overrightarrow{j}, \quad \gamma(t) = (t,\ \text{sen}\ (t)),\ 0 \leq t \leq \pi$

(17.2) $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2\overrightarrow{j}, \quad \gamma(t) = (t^2, 3),\ -1 \leq t \leq 1$

(17.3) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}, \quad \gamma(t) = (2\ \cos\ (t), 3\ \text{sen}\ (t), t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$

(17.4) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y+z)\overrightarrow{k}, \quad \gamma(t) = (t,t,1-t^2),\ 0 \leq t \leq 1$

[18] Calcule a integral de linha do vetor $\overrightarrow{F} = 3x^2y^2z^4\overrightarrow{i} + 2x^3yz^4\overrightarrow{j} + 4x^3y^2z^3\overrightarrow{k}$ ao longo do segmento de reta que liga o ponto $(1,2,3)$ ao ponto $(0,0,1)$.

[19] Calcule a integral de linha do vetor $\overrightarrow{F} = \frac{\sqrt{x}}{2}\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ no percurso definido por $x = 2y = z^2$, do ponto $(0,0,0)$ até o ponto $(1, 1/2, 1)$.

[20] Calcule a integral de linha do vetor $\overrightarrow{F} = y\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ ao longo da trajetória fechada determinada pelo círculo de raio 2 centrado na origem e contido no plano cuja normal é o vetor $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

[21] Calcule a integral de linha do vetor $\overrightarrow{F} = -z\overrightarrow{i} + 3x\overrightarrow{j} + 2y\overrightarrow{k}$, no caminho fechado definido pelas arestas do triângulo cujos vertices são $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ (percorridos nesta ordem).

Teorema de Green

[22] Utilize o Teorema de Green para calcular as seguintes integrais de linha:

(22.1) $\oint_C \frac{-x^2y}{1+x^2}\, dx + \text{ arctg}x\ dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y = 0,\ x = 1,$ $y = 1,\ x = 0.$

(22.2) $\oint_C x\ dx + xy\ dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y = 0,\ x^2 + y^2 = 1$ $(x, y \geq 0),\ x = 0.$

(22.3) $\oint_C -y^3\ dx + x^3\ dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y = x^3$ e $y = x.$

(22.4) $\oint_C (x^2 - y)\ dx + x\ dy,$ onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9.$

(22.5) $\oint_C (-y^2 + \text{ arctg}x)\ dx + \ln x\ dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $x = y^2.$

[23] Se R for uma região plana qualquer á qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área A de R é dada pela formula

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\partial R} -y \; dx + x \; dy \qquad\qquad (*)$$

Use a fórmula $(*)$ para calcular a área das regiões limitadas pelas curvas dadas:

(23.1) $y = 3x$ e $y^2 = 9x$.

(23.2) $y = 0, \; x + y = a \; (a > 0), \; x = 0$.

(23.3) o eixo x e o arco da ciclóide $x = a(\theta - \text{ sen } \theta), \; y = a(1 - \cos \theta), \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(23.4) $x = a \cos^3\theta$ e $y = a \text{ sen }^3\theta, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

[24] Qual é a taxa de escoamento de um fluído com campo de velocidades $\overrightarrow{V}(x,y) = (8x - y^2, x - 5y)$ metros/segundos para fora de uma região R de área igual a $11m^2$.

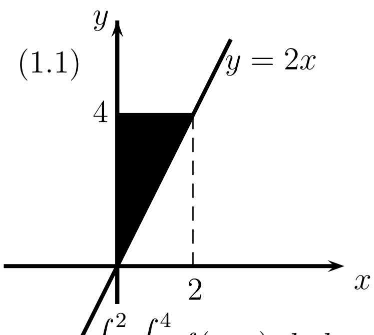
[25] Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2, xy)$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

[26] Considere o campo vetorial $\overrightarrow{v}(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ e região R limitada pela curva $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to (1 + \cos t, \text{ sen } t)$. Calcule a circulação de $\overrightarrow{v}$ sobre γ.

Respostas

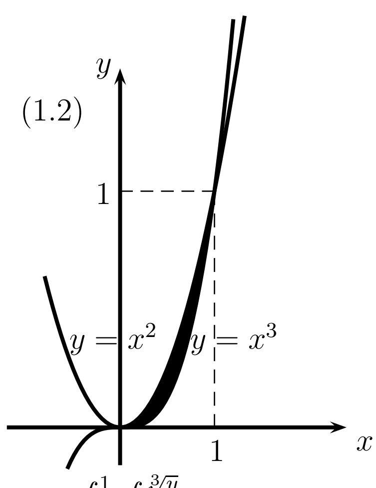
[1]

(1.1)



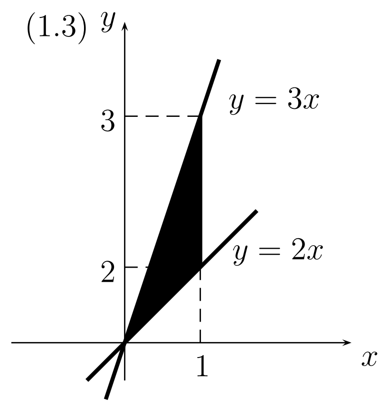
$\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x,y) \; dydx$

(1.2)



$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) \; dxdy$

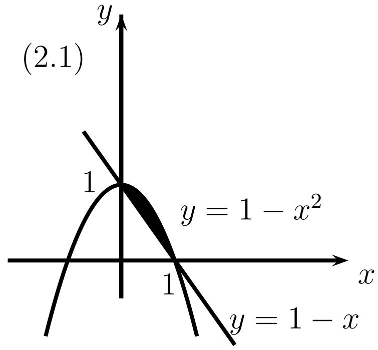
(1.3)



$\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y) \; dxdy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y) \; dxdy$

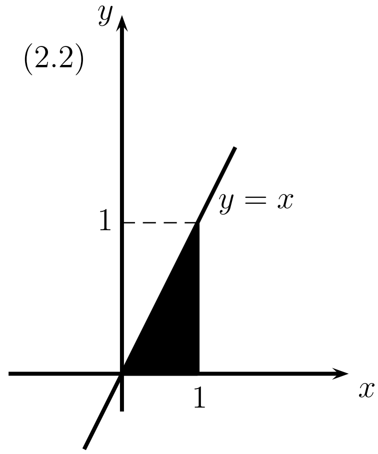
[2]

(2.1)



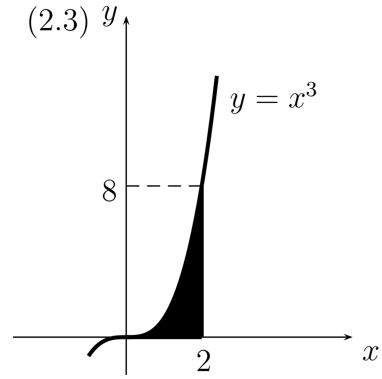
$$\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \frac{\text{sen }(\pi x)}{1-x}\; dydx = \frac{1}{\pi}$$

(2.2)



$$\int_0^1 \int_0^x y e^{x^3}\; dydx = \frac{e-1}{6}$$

(2.3)



$$\int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\; dydx = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}$$

[3] $\Big\{$ (3.1) $e^3 - e - 2$ (3.2) $\dfrac{4}{\pi}$ (3.3) $\dfrac{3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1}{3}$

[4] $\Big\{$ (4.1) $\dfrac{896}{15}$ (4.2) 0 (4.3) $\left(\text{arctg}(2) - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \ln 2$

[5] $\Big\{$ (5.1) 2π (5.2) $\dfrac{15}{4}$ (5.3) $4a$ (5.4) $\dfrac{\pi}{16}$

[6] $\Big\{$ (6.1) $\dfrac{3}{4}$ (6.2) $\dfrac{e-2}{2e}$ (6.3) $\dfrac{9}{2}$ (6.4) $\dfrac{145}{6}$

[7] $\dfrac{9\pi + 16\sqrt{2} + 1}{16}$ [8] $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{2}\right)$

[9] $\Big\{$ (9.1) 1 (9.2) $\dfrac{43}{2}$ (9.3) $\dfrac{11}{6}$

[11] $\left\{ \begin{array}{lll} (11.1)\ y^2 + 2ye^{x^2+y^2} & (11.2)\ -\ \text{sen }(x+y) + \pi x \cos(x+y) & (11.3)\ 1 \\ (11.4)\ y + 2z & (11.5)\ 2xyz\left(e^{x^2yz} + e^{xy^2z} + e^{xyz^2}\right) & (11.6)\ 1 + x^2y \end{array} \right.$

[12] $\left\{ \begin{array}{ll} (12.1)\ 6y\,\overrightarrow{i} + 6z\,\overrightarrow{j} + 6x\,\overrightarrow{k} & (12.2)\ -\ \cos y\,\overrightarrow{i} \\ (12.3)\ (z^2 - 2)\,\overrightarrow{i} + (3 - 2x\ \text{sen }(2xy))\,\overrightarrow{k} & (12.4)\ 0 \end{array} \right.$

[13] $\begin{cases} (13.1) \text{ não conservativo} \\ (13.2) \ \text{conservativo; } f(x,y) = xe^y + \dfrac{y^2}{2} + k, \ k \text{ é constante} \\ (13.3) \ \text{conservativo; } f(x,y) = 4xy + 2y^3 + k, \ k \text{ é constante} \\ (13.4) \ \text{conservativo; } f(x,y,z) = xyz + k, \ k \text{ é constante} \\ (13.5) \ \text{conservativo; } f(x,y,z) = ze^{xy} + \text{ sen } z + k, \ k \text{ é constante} \end{cases}$

[14] $\left(\dfrac{120}{29}, \dfrac{300}{29}\right)$

[15] $\begin{cases} (15.1) \ \dfrac{125 - 13\sqrt{13}}{48} & (15.2) \ \sqrt{6}\Big(2 \text{ sen } (e^2) + 3e^4 - 2e^2 - 2 \text{ sen } e\Big) \\ (15.3) \ \dfrac{8192}{5} & (15.4) \ \dfrac{56\sqrt{57}}{3} \\ (15.5) \ -2 & (15.6) \ -2\pi \\ (15.7) \ \dfrac{35}{3} & \end{cases}$

[16] $9 \text{ sen } (2) - 8$

[17] $\left\{ (17.1) \ \dfrac{\pi^3}{3} - 2 \qquad (17.2) \ 0 \qquad (17.3) \ \dfrac{8\pi^3}{3} \qquad (17.4) \ \dfrac{-11}{6} \right.$

[18] 864 [19] $\dfrac{7}{3}$ [20] -12π [21] 1

[22] $\left\{ (22.1) \ 1 \qquad (22.2) \ \dfrac{1}{3} \qquad (22.3) \ \dfrac{5}{42} \qquad (22.4) \ 18\pi \qquad (22.5) \ \dfrac{9}{5} \right.$

[23] $\left\{ (23.1) \ \dfrac{1}{2} \qquad (23.2) \ \dfrac{a^2}{2} \qquad (23.3) \ 3\pi a^2 \qquad (23.4) \ 8a \right.$

[24] 33 [25] 0 [26] 2π