UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS 1

Atualizada 2007.2

Áreas de figuras planas em coordenadas cartesianas

[1] Determine a área da região do plano limitada simultaneamente pelas seguintes curvas:

(1.1) $y = \ln x,\ x = 2$ e o eixo Ox

(1.2) $x = 8 + 2y - y^2,\ y = 1,\ y = 3$ e $x = 0$

(1.3) $xy = 4$ e $x + y = 5$

(1.4) $y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 0$ e $x = 2$

(1.5) $y = 2x,\ y = 1$ e $y = \dfrac{2}{x}$

(1.6) $y = |x^2 - 4|$ e $y = 2$

(1.7) $y = x^3 - 3x$ e $y = 2x^2$

(1.8) $y = \dfrac{9}{x},\ y = 9x$ e $y = x$

(1.9) $f(x) = x|x|$ e $g(x) = x^3$

(1.10) $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$

Volumes por seções planas paralelas

[2] Utilizando seções planas paralelas, mostre que o volume de uma pirâmide quadrangular reta, com altura h e base quadrada de lado a, é igual a $\dfrac{a^2h}{3}$.

[3] Utilizando integral de seções planas paralelas, mostre que o volume do cone circular reto, de altura h e raio da base r, é igual a $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

[4] Calcule o volume do sólido que tem para base um círculo cujo raio mede 3 u. c. e cujas seções transversais a um diâmetro desta são quadrados, todos contidos em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos lados cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[5] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados

em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus catetos cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[6] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como hipotenusa cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[7] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas situadas em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e a medida do eixo maior igual ao dobro da medida do eixo menor. (Considere a área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b, respectivamente, igual a πab).

[8] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixos medindo 2 cm e 3 cm e cujas seções transversais ao eixo maior são triângulos eqüiláteros, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem. (Observação: A área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b, respectivamente, igual a πab).

[9] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor a e b, respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo maior são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo maior. (Observe que esse volume é menor do que o volume do item anterior).

[10] Calcule uma expressão, em integrais, que represente o volume do sólido que tem para base a região do plano limitada pela parábola $P : x = y^2 - 1$ e a reta $r : x = y + 1$ e cujas seções transversais ao eixo Oy são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tais que as hipotenusas têm extremidades no contorno da base desse sólido e são perpendiculares ao eixo Oy.

[11] Calcule o volume do elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
(Observação: A área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b, respectivamente, igual a πab.)

[12] Calcule o volume do sólido, interseção dos cilindros $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e
$C_2 : x^2 + z^2 = 1$.

Volumes de sólidos de revolução

[13] Represente graficamente e calcule o volume do sólido limitado pelo plano $\pi : z = 1$ e a superfície $S : z = x^2 + y^2$.

[14] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, com $x \in [-1, 1]$, em torno do eixo Ox.

[15] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da elipse $E : 9x^2 + y^2 = 9$ em torno do:

(15.1) Eixo maior (15.2) Eixo menor.

[16] Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região compreendida entre o(s) gráfico(s) de:

(16.1) $y = (x-1)(x-3)^2$ e o eixo x, ao redor do eixo y

(16.2) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$ e o eixo x, ao redor do eixo x

(16.3) $y = 2\sqrt{x-1}$ e $y = x - 1$, ao redor da reta $x = 6$

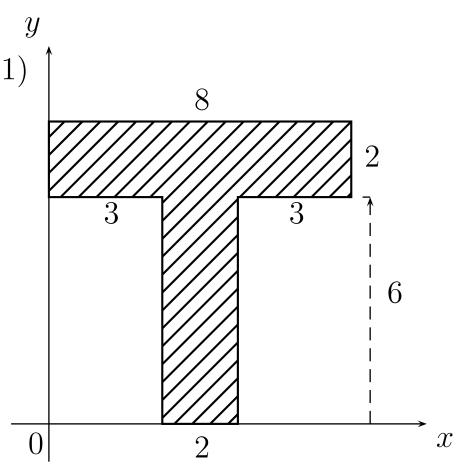
(16.4) $x = (y-2)^2$ e $y = x$, ao redor da reta $y = 1$

(16.5) $y =$ sen x, para $0 \leq x \leq \pi$, ao redor do eixo x

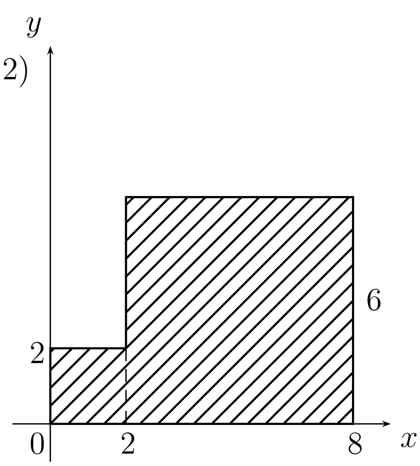
Centróides de Regiões Planas em coordenadas cartesianas e Teorema do Pappos-Guldin

[17] Determine a posição do centróide das seguintes figuras:

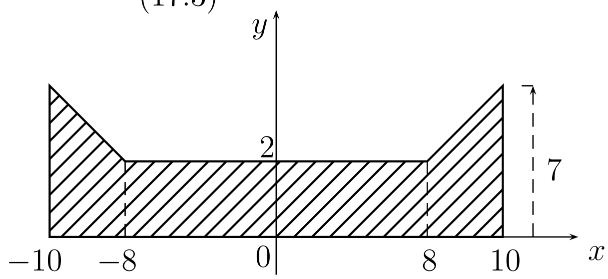
(17.1)



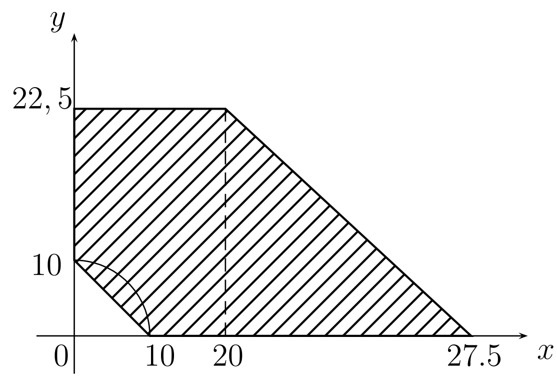
(17.2)



(17.3)



(17.4)



[18] Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada:

(18.1) Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$

(18.2) Área delimitada pela curva $y=4-\dfrac{x^2}{4}$ e o eixo x

(18.3) Área delimitada pela parábola $y^2=ax$ e pela reta $x=a$.

[19] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+2$.

(19.1) Esboce R e calcule a sua área.

(19.2) Calcule o centróide de R.

(26.3) A região R é girado em torno da reta $x=2$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappos-Guldin.

[20] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y=-x^2-3x+6$ e $x+y-3=0$.

(20.1) Esboce R e calcule a sua área.

(20.2) Calcule o centróide de R.

(20.3) A região R é girado em torno da reta $x+y-3=0$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappos-Guldin.

[21] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = x^2,\ y = 2 - x$ e o eixo dos x.

(21.1) Esboce R e calcule a sua área.

(21.2) Calcule o centróide de R.

(21.3) A região R é girado em torno da reta $y = 1$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappos-Guldin.

Comprimento de arco em coordenadas cartesianas

[22] Determinar o comprimento das curvas dadas em coordenadas retangulares:

(22.1) $y = \ln\,(1 - x^2)$ de $x = \dfrac{1}{4}$ a $x = \dfrac{3}{4}$.

(22.2) $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

(22.3) $y = 1 - \ln\,(\operatorname{sen} x)$ de $x = \dfrac{\pi}{6}$ a $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(22.4) $(y-1)^2 = (x+1)^3$ de $x = 0$ a $x = 1$.

(22.5) $y = \dfrac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big)$ de $x = 0$ a $x = 1$.

(22.6) $x = \dfrac{1}{3}y^3 + \dfrac{1}{4y}$ de $y = 1$ a $y = 3$.

Respostas

[1] $\begin{cases} (1.1)\ [2\ln 2 - 1]\text{u.a} & (1.2)\ \dfrac{46}{3}\text{u.a} & (1.3)\ \left[\dfrac{15}{2} - 8\ln 2\right]\text{u.a} \\ (1.4)\ \left[\frac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}\right]\text{u.a} & (1.5)\ \left[\dfrac{-3}{4} + 2\ln 2\right]\text{u.a} & (1.6)\ \left[\dfrac{16\sqrt{2} + 24\sqrt{6} - 64}{3}\right]\text{u.a} \\ (1.7)\ \frac{71}{6}\text{u.a} & (1.8)\ 18\ln 3\ \text{u.a} & (1.9)\ \dfrac{1}{6}\text{u.a} \\ (1.10)\ \dfrac{64}{3}\text{u.a} & & \end{cases}$

[4] $V = 144$ u.v [5] $V = \dfrac{8r^3}{3}$ [6] $V = \dfrac{4r^3}{3}$ [7] $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

[8] $V = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ [9] $V = \dfrac{2\pi ab^2}{3}$

[10] $V = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{(2 + y - y^2)^2}{4}\, dy = \frac{81}{40}$ u.v

[11] $V = \dfrac{4\pi abc}{3}$ [12] $V = \dfrac{16}{3}$ u.v [13] $V = \dfrac{\pi}{2}$ u.v [14] $V = \dfrac{\pi(e^4 + 4e^2 - 1)}{4e^2}$ u.v

[15] $\{\ (15.1)\ V = 4\pi$ u.v $(15.2)\ V = 12\pi$ u.v

[16] $\begin{cases} (16.1)\ V = \dfrac{24\pi}{5}\ \text{u.v} & (16.2)\ V = \dfrac{96\pi}{5}\ \text{u.v} & (16.3)\ V = \dfrac{272\pi}{15}\ \text{u.v} \\ (16.4)\ V = \dfrac{27\pi}{2}\ \text{u.v} & (16.5)\ V = \dfrac{\pi^2}{2}\ \text{u.v} & \end{cases}$

[17] $\begin{cases} (17.1)\ (4;\ 5,3) & (17.2)\ (4,6;\ 2,8) \\ (17.3)\ (0;\ 1,53) & (17.4)\ (13,3\ ;11,8) \end{cases}$

[18] $\{\ (18.1)\ \left(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$ $(18.2)\ \left(0, \dfrac{8}{5}\right)$ $(18.3)\ \left(\dfrac{3a}{5}, 0\right)$

[19] $\{\ (19.1)\ A = \dfrac{8}{3}$ u.a $(19.2)\ (\bar{x},\ \bar{y}) = (0,\ 1)$ $(19.3)\ V = \dfrac{32\pi}{3}$ u.v

[20] $\{\ (20.1)\ A = \dfrac{32}{3}$ u.a $(20.2)\ (\bar{x},\ \bar{y}) = \left(-1,\ \dfrac{25}{8}\right)$ $(20.3)\ V = \dfrac{256\sqrt{2}\pi}{15}$ u.v

[21] $\{\ (21.1)\ A = \dfrac{5}{6}$ u.a $(21.2)\ (\bar{x},\ \bar{y}) = \left(\dfrac{11}{10},\ \dfrac{8}{25}\right)$ $(21.3)\ V = \dfrac{17\pi}{15}$ u.v

[22] $\begin{cases} (22.1)\ \ln\left(\dfrac{21}{5}\right) - \dfrac{1}{2}\ \text{u.c} & (22.2)\ \dfrac{123}{32}\ \text{u.c} & (22.3)\ \ln\left|\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}}\right|\ \text{u.c} \\ (22.4)\ \dfrac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13})\ \text{u.c} & (22.5)\ \dfrac{1}{2e}(e^2 - 1)\ \text{u.c} & (22.6)\ \dfrac{53}{6}\ \text{u.c} \end{cases}$