Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS 2

Atualizada 2007.2

Curvas na forma paramétricas

[1] Escreva as seguintes curvas na forma paramétricas:

(1.1) reta: $y = ax + b$

(1.2) circulo: $x^2 + y^2 = a^2$

(1.3) elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(1.4) hiperbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(1.5) ciclóide - a trajetória descrita por um ponto na circumferência de raio R quando essa "roda", sem deslizar, sobre uma reta.

[2] Esboçar os gráficos das seguintes curvas paramétricas. (Use o Winplot[1] para visualizar e confirmar os gráficos construídos). Eliminando t nas equações, achar as equações na forma cartesiana:

(2.1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (2.1) $\begin{cases} x = t^5 - 4t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

(2.3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ (2.4) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$, $t \geq 0$.

[1] <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>

Derivadas de Funções dadas na forma paramétrica

$$\text{Se} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) \cdot \frac{dt}{dx}$$

[3] Calcule as expressões das derivadas e os seus respectivos valores nos pontos dados:

$$(3.1) \begin{cases} x = \text{ sen } \ t \\ y = \text{ sen } \ 2t \end{cases}, \ t \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], \ \frac{dy}{dx}, \ \text{ no ponto } \ t = \frac{\pi}{6}$$

$$(3.2) \begin{cases} x = 6t(1+t^2)^{-1} \\ y = 6t^2(1+t^2)^{-1} \end{cases}, \ 0 \le t \le 1, \ \frac{dy}{dx}, \ \text{ no ponto de abscissa } \ \frac{12}{5}$$

$$(3.3) \begin{cases} x = t + \text{ sen } (\frac{\pi}{2}t) \\ y = t + \ln t \end{cases}, \ t > 0, \ \frac{dy}{dx}, \ \text{ no ponto } \ t = 8$$

[4] Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nos seguintes casos:

$$(4.1) \begin{cases} x = \text{ sen } t \\ y = \text{ sen } 2t \end{cases}, t \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \qquad (4.2) \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$$

[5] Verifique se:

$$(5.1) \begin{cases} x = \text{ sec } (t) \\ y = \ln (\ \cos t) \end{cases}, t \in \Big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big[, \ \text{ satisfaz a equação } \ \frac{d^2y}{dx^2} + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(5.2) \begin{cases} x = \text{ arcsen}(t) \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1, 1], \ \text{ satisfaz a equação } \ \text{ sen } x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

[6] Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da curva C, no ponto de abscissa $x_0 = -\dfrac{1}{4}$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = 2 \cos {}^3 t \\ y = 2 \text{ sen } {}^3 t \end{cases}, \ t \in [0, \pi].$$

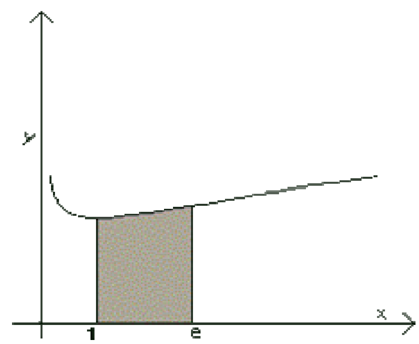
[7] Determine as equações das retas tangentes e normal ao gráfico da curva C, no ponto com $t = 1$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \text{ arctg}(t) \end{cases}.$$

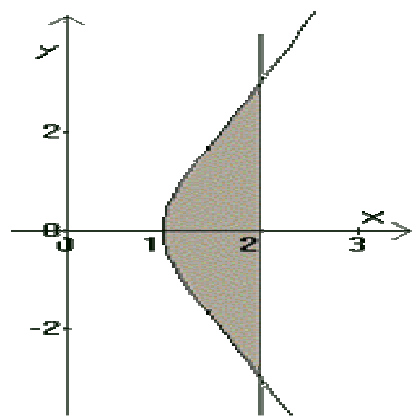
Áreas de regiões planas dadas por funções na forma paramétrica

[8] Determine a área limitada:

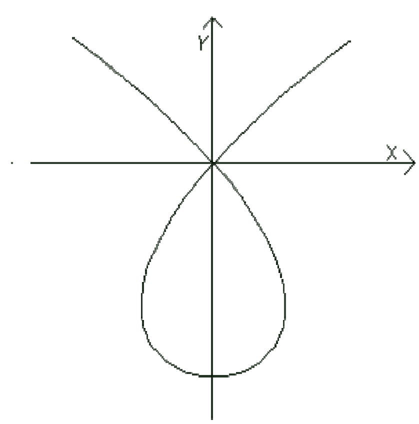
(8.1) pelo eixo Ox, $x = 1$, $x = e$ e a curva de equações paramétricas $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$



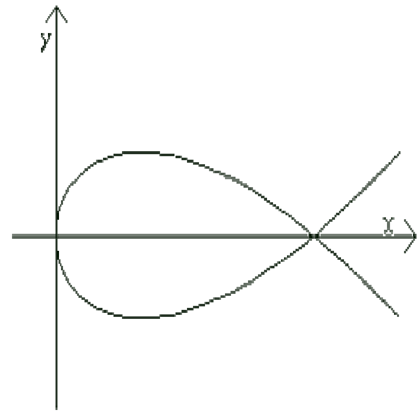
(8.2) pelas curvas de equações $x = 2$ e $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$



(8.3) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$



(8.4) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$



[9] Determine a área da região limitada pelas curvas de equações

$$x = 2 \quad \text{e} \begin{cases} x = \sec t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}, \; -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

[10] Seja R a região do plano acima da reta $y = 2$ e abaixo do arco da ciclóide de equações

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi].$$

Esboce R e calcule a sua área.

Comprimento do arco de uma função na forma paramétrica

[11] Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo:

(11.1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(11.2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$

(11.3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, \; a > 0$

(11.4) $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

(11.5) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(11.6) $\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

[12] As equações $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ dão a posição (x, y) de uma partícula no instante t. Determine a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$.

[13] Determine o comprimento de arco do laço de curva do exercício (8.4).

Volumes de sólidos de revolução

[14] Dê a expressão da integral que permite calcular o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada pelo arco de ciclóide $\begin{cases} x = t - \text{ sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e o eixo Ox gira em torno de:

(14.1) $y = -1$ (14.2) $x = \pi$ (14.3) $y = 0$.

Respostas

[1] $\begin{cases} (1.1) \begin{cases} x = t \\ y = at + b \end{cases} & (1.2) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \text{ sen } t \end{cases}, \ 0 \leq \theta < 2\pi \\ (1.3) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \text{ sen } t \end{cases}, \ 0 \leq \theta < 2\pi & (1.4) \begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \text{ tg } t \end{cases}, \ t \neq \dfrac{(2n+1)\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z}. \\ (1.5) \begin{cases} x = R(\theta - \text{ sen } \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi. & \end{cases}$

[2] $\begin{cases} (2.1) \ y^2 = x^3 & (2.2) \ x^2 = y^5 - 8y^4 + 16y^3 \\ (2.3) \ y = \dfrac{1}{8}(\ln x)^3 + \dfrac{1}{2}(\ln x) & (2.4) \ y = x^2 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} (3.1) \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2cos(2t)}{cos(t)}, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} \\ (3.2) \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1-t^2}; \text{ para } x = \dfrac{12}{5}, \text{ temos } t = \dfrac{1}{2}, \text{ logo } \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} \\ (3.3) \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+t}{t} \cdot \dfrac{1}{1 + (\pi/2)cos(\frac{\pi}{2}t)}, \qquad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=8} = \dfrac{9}{8+4\pi} \end{cases}$

[4] $\begin{cases} (4.1) \ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2 \cos (2t). \text{ sen } (t) - 4. \text{ sen } (2t). \cos (t)}{\cos^3(t)} \qquad (4.2) \ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12e^{5t} \end{cases}$

[6] $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$[7]\ \begin{cases} \text{Reta Tangente: } y-(1+\frac{\pi}{2}) = 2(x-1) \\ \text{Reta Normal: } y-(1+\frac{\pi}{2}) = -1\dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$$

$$[8]\ \Big\{\ (8.1)\ \frac{9e-10}{4} \text{ u.a} \qquad (8.2)\ \frac{52}{15} \text{ u.a} \qquad (8.3)\ \frac{8}{15} \text{ u.a} \qquad (8.4)\ \frac{8\sqrt{3}}{5} \text{ u.a}$$

$[9]\ 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right|$ u.a $\qquad$ $[10]\ (4\pi + 12)$ u.a

$$[11]\ \begin{cases} (11.1)\ 4a \text{ u.c} \qquad (11.2)\ \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left|\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right| \text{ u.c} \qquad (11.3)\ 6a \text{ u.c} \\ \\ (11.4)\ \dfrac{1}{2} \text{ u.c} \qquad (11.5)\ 8a \text{ u.c} \qquad (11.6)\ \sqrt{2}(e^{\pi/2}-1) \text{ u.c} \end{cases}$$

$[12]\ 10\sqrt{26} + 2\ln\,(5+\sqrt{26})$ u.c $\qquad$ $[13]\ 4\sqrt{3}$ u.c

$$[14]\ \begin{cases} (14.1)\ V = \pi \displaystyle\int_0^{2\pi} \Big[(2-\ \cos t)^2 - 1\Big]\Big[1-\ \cos t\Big]\ dt \\ \\ (14.2)\ V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \Big[\pi - (t-\ \text{sen}\ t)^2\Big]\ \text{sen}\ t\ dt \\ \\ (14.3)\ V = \pi \displaystyle\int_0^{2\pi} (1-cost)^3\ dt \end{cases}$$