Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS 3

Atualizada 2007.2

Coordenadas Polares

[1] Marcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares; depois encontrar outro ponto de coordenadas polares para o mesmo ponto, tal que

(a) $r < 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi;$ (b) $r > 0,\ -2\pi < \theta \leq 0;$ (c) $r < 0,\ -2\pi < \theta \leq 0.$

(1.1) $(3, \frac{1}{3}\pi)$ (1.2) $(4, \frac{1}{6}\pi)$ (1.3) $(3, \frac{2}{3}\pi)$

(1.4) $(2, -\frac{1}{2}\pi)$ (1.5) $(-5, \frac{3}{4}\pi)$ (1.6) $(-1, -\frac{5}{3}\pi)$

[2] Transformar os pontos e equações cartesianas para polares:

(2.1) $A = (-2, -2\sqrt{3})$ (2.2) $B = (-1, \sqrt{3})$ (2.3) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(2.4) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (2.5) $x^3 = 4y^2$ (2.6) $x^2 - y^2 = 16$

(2.7) $x = 5$ (2.8) $y = 3$ (2.9) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

(2.10) $xy = 5$ (2.11) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (2.12) $x^2 + y^2 + 3y = 0$

[3] Transformar os pontos e equações polares para cartesianas:

(3.1) $P = (2, \frac{-7\pi}{6})$ (3.2) $P = (2, \frac{7\pi}{6})$ (3.3) $r = \dfrac{6}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

(3.4) $r^2 = \theta$ (3.5) $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$ (3.6) $r = \dfrac{4}{3 - \cos\theta}$

(3.7) $r\cos\theta = -1$ (3.8) $r^2 = 4\cos 2\theta$ (3.9) $r^2\,\text{sen}\,2\theta = 2$

(3.10) $r\cos\theta = 0$ (3.11) $r^2 = 1$ (3.12) $r = 8\,\text{sen}\,\theta$

(3.13) $r = 2(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$ (3.14) $r^2\cos 2\theta = 2$ (3.15) $\cos^2\theta = \text{sen}^2\theta$

[4] Faça um esboço do gráfico das seguintes equações polares: (use o Winplot[1] para visualizar e confirmar os gráficos construídos)

(4.1) $\theta = \frac{\pi}{3}$	(4.2) $r = \frac{\pi}{3}$	(4.3) $r \cos\theta = 4$
(4.4) $r = 4\cos\theta$	(4.5) $r \operatorname{sen}\theta = 2$	(4.6) $r = 2\operatorname{sen}\theta$
(4.7) $r = 4 - 4\cos\theta$	(4.8) $r = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$	(4.9) $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$
(4.10) $r^2 = -25\cos 2\theta$	(4.11) $r = 4\operatorname{sen} 5\theta$	(4.12) $r = \lvert\operatorname{sen} 2\theta\rvert$
(4.13) $r = 3\theta,\ \theta > 0$	(4.14) $r = -3\cos\theta$	(4.15) $r = -8\operatorname{sen} 2\theta$

[5] Ache os pontos de intersecção dos gráficos do par de equações dadas:

(5.1) $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$ (5.2) $\begin{cases} r = 4(1 + \operatorname{sen}\theta) \\ r(1 - \operatorname{sen}\theta) = 3 \end{cases}$

(5.3) $\begin{cases} r = \operatorname{sen} 2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ (5.4) $\begin{cases} r = 1 - \operatorname{sen}\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

[6] Deduzir a fórmula da distância entre os pontos $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ em coordenadas polares.

Áreas de figuras planas em coordenadas polares

[7] Nos problemas a seguir encontre a área das regiões indicadas:

(7.1) Interior à circunferência $r = \cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

(7.2) Exterior à circunferência $r = \cos\theta$ e interior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

(7.3) Intersecção do círculo $r = \cos\theta$ com o interior da cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

(7.4) Intersecção dos círculos $r = 4\cos\theta$ e $r = 2$.

(7.5) Interior à rosácea $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$.

(7.6) Interior à rosácea $r = 2\cos 3\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(7.7) Interior à circunferência $r = 1$ e exterior à rosácea $r = 2\cos 3\theta$.

(7.8) Entre a 3ª e 4ª voltas da espiral $r = a,\ a > 0$ e $\theta \geq 0$.

(7.9) Interior à lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

(7.10) Interior à rosácea $r = \operatorname{sen} 2\theta$ e exterior à circunferência circunferência $r = \cos\theta$.

(7.11) Exterior à limaçon $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$ e interior à circunferência $r = 3\operatorname{sen}\theta$.

(7.12) Intersecção do círculo $r = 1$ como interior da lemniscata $r^2 = a^2\operatorname{sen} 2\theta$.

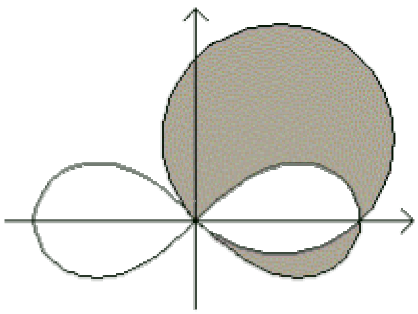
[1] <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>

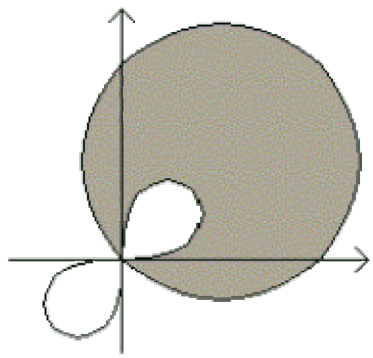
[8] Considere os pares de curvas dadas a seguir. Calcule a área hachurada conforme figura de cada item.

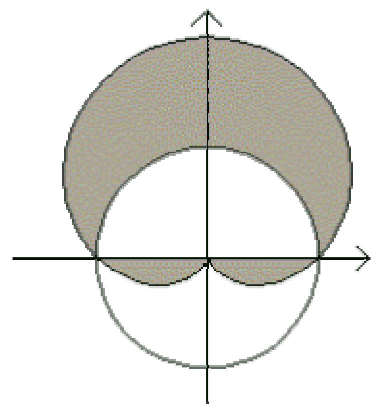
(8.1) $r^2 = 4\cos 2\theta$ e $r = 2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$.

(8.2) $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ e $r = 4(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$.

(8.3) $r = 1$ e $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.





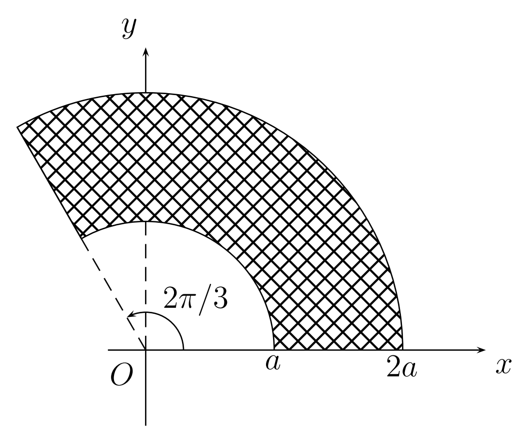


Centróides de Regiões Planas em coordenadas polares e Teorema do Pappos-Guldin

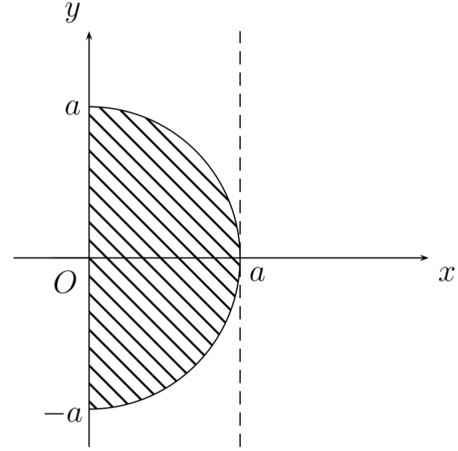
[9] O diagrama ao lado mostra uma lamina rígido uniforme em forma de uma seção de um anel circular que está no plano xy. A seção é de ângulo $\dfrac{2\pi}{3}$ e raio r onde $a \leq r \leq 2a$ como mostrado.

Mostre que as coordenadas do centróide G deste lamina são $\left(\dfrac{7\sqrt{3}a}{6\pi}, \dfrac{7a}{2\pi}\right)$.

Agora, a lamina é girado por 2π em torno do eixo x. Utilizando o Teorema de Pappos-Guldin, encontre o volume deste sólido de revolução.

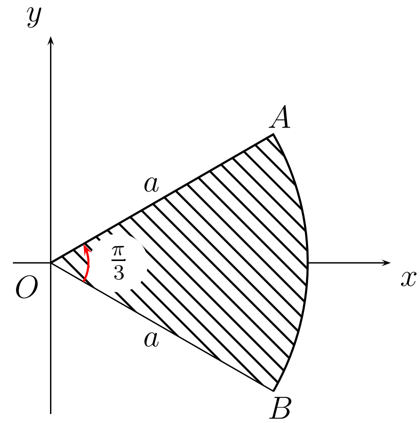


[10] O diagrama ao lado mostra uma lamina semicircular rígido uniforme de raio a e massa M no plano xy. Usando coordenadas polares, calcule as coordenadas do centróide G desta lamina.



Agora, a lamina é girada por um ângulo de 2π em torno da reta $x = a$. Mostre pelo Teorema de Pappos-Guldin, que o volume do sólido de revolução gerado é $\dfrac{(3\pi - 4)\pi a^3}{3}$.

[11] O diagrama ao lado mostra uma lamina rígido uniforme AOB de massa M no plano xy. A lamina é um setor de um disco de raio a, cujo centro é a origem O, com ângulo $A\widehat{O}B$ igual $\dfrac{\pi}{3}$. Usando coordenadas polares, calcule as coordenadas do centróide G desta lamina.



Agora, a lamina é girada por um ângulo de 2π em torno do eixo y. Mostre pelo Teorema de Pappos-Guldin, que o volume do sólido de revolução gerado é $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Comprimento de arco em coordenadas polares

[12] Calcular o comprimento de arco das seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

(12.1) a espiral $r = \theta^2,\ 0 \leq \theta \leq \sqrt{3}$

(12.2) a espiral $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$

(12.3) a cardioide $r = 1 + \cos\theta$

(12.4) $r = -1 + \operatorname{sen}\theta$

(12.5) $r = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta),\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(12.6) $r = \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$

[13] Determine o comprimento da espiral logarítmica $r = e^{\theta/2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2$.

[14] Calcule o comprimento de arco da curva $r = \cos^2(\theta/2)$.

[15] Determine a expressão da integral que permite calcular o comprimento dos arcos que limitam as regiões dos exercícios : (7.6), (7.9) e (7.11).

Respostas

[2]
(2.1) $(4, \frac{4}{3}\pi)$ (2.2) $(2, \frac{2}{3}\pi)$
(2.3) $r^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 0$
(2.4) $r = 0$ ou $r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) - \frac{3a}{2}\operatorname{sen} 2\theta = 0$ (2.5) $r = 0$ ou $r = 4 \operatorname{tg}^2\theta \sec\theta$
(2.6) $r^2 = 16 \sec\theta$ (2.7) $r\cos\theta = 5$
(2.8) $r \operatorname{sen}\theta = 5$
(2.9) $r^2 - 2r(\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta) + 6 = 0$ (2.10) $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 10$
(2.11) $r = 0$ ou $r = 2\cos\theta$ (2.12) $r + 3\operatorname{sen}\theta = 0$

[3]
(3.1) $(-\sqrt{3}, 1)$ (3.2) $(-\sqrt{3}, -1)$
(3.3) $2\sqrt{x^2+y^2} - 6x - 3y = 0$ (3.4) $y - x \operatorname{tg}(x^2+y^2) = 0$
(3.5) $(x^2+y^2)^2 - 6x^2y + 2y^3 = 0$ (3.6) $3\sqrt{x^2+y^2} = x + 4$
(3.7) $x = -1$ (3.8) $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$
(3.9) $xy = 1$ (3.10) $x = 0$
(3.11) $x^2+y^2 = 1$ (3.12) $x^2+y^2-8y = 0$
(3.13) $x^2+y^2 = 2(x+y)$ (3.14) $x^2-y^2 = 2$
(3.15) $x^2 = y^2$

[5]
(5.1) $\left(\frac{3}{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5\pi}{3}\right)$

(5.2) $\left(6,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(6,\ \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(2,\ \frac{7\pi}{6}\right)$ e $\left(2,\ \frac{11\pi}{6}\right)$

(5.3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{9\pi}{8}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{13\pi}{8}\right)$

(5.4) $\left(1,\ 0\right)$, $\left(1,\ \pi\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5\pi}{6}\right)$

[6] $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$

[7]
(7.1) $\frac{12\sqrt{3}-4\pi}{12}$ (7.2) $\frac{11\pi+12\sqrt{3}}{12}$ (7.3) $\frac{7\pi-12\sqrt{3}}{12}$ (7.4) $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{3}$
(7.5) 2π (7.6) $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$ (7.7) $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$ (7.8) $24a^2\pi^3$
(7.9) a^2 (7.10) $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$ (7.11) $3\sqrt{3}$ (7.12) $\frac{6-3\sqrt{3}+\pi}{3}$

[8] $\left\{ \quad (8.1)\ 2+\pi \qquad (8.2)\ 8\pi - 2 \qquad (8.3)\ \pi \right.$

[9] $V = 7a^3\pi$ u.c   [10] $\left(\dfrac{4a}{3\pi}, 0\right)$ [11] $\left(\dfrac{2a}{\pi}, 0\right)$

[12] $\left\{ \begin{array}{lll} (12.1)\ \dfrac{21\sqrt{7}}{9} - \dfrac{8}{3} & (12.2)\ e^{\pi} - 1 & (12.3)\ 8 \\ (12.4)\ 8 & (12.5)\ \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2} & (12.6)\ \pi\sqrt{2} \end{array} \right.$

[13] $\sqrt{5}(e-1)$ [14] 4

[15] $\left\{ \begin{array}{l} (7.6)\ S = 6\displaystyle\int_0^{\pi/6} \left(2\sqrt{\cos^2(3\theta) + 9\,\mathrm{sen}^2(3\theta)} + 1\right) d\theta \\ (7.9) \\ (7.11) \end{array} \right.$